

Überlegungen zur PWM Ansteuerung von Elektromotoren

OlliW, Version 20.05.2010, letzte Änderung 2.04.2011

Die PWM Ansteuerung von Elektromotoren ist im Modellbau Standard. Die Wicklungen im Motor wirken nun allerdings nicht nur wie ein Widerstand sondern auch wie eine Induktivität. Diese ist zwar klein, und spielt daher bei einem Gleichspannungsbetrieb keine relevante Rolle, ist aber bei einem getakteten Betrieb mit den üblichen PWM Frequenzen im kHz Bereich nicht a priori vernachlässigbar. Es stellt sich daher die Frage, inwieweit die für den Gleichspannungsbetrieb bekannten Motorgleichungen auf den Fall einer PWM Ansteuerung übertragen werden können, oder an welchen Stellen sie modifiziert werden müssen. Hier werden dazu einige Überlegungen angestellt. Ich habe vor allem „brushed“ Motoren wie sie z.B. in den kleinen Koaxialhelikoptern zum Einsatz kommen im Auge. Viele der Überlegungen sind sicher auf andere Fälle übertragbar, wie z.B. "brushless" Motoren, dies wird hier aber nicht diskutiert.

Bemerkung:

Ich bin kein Motorenexperte und/oder habe langjährige praktische Erfahrung mit Elektromotoren. Die untenstehenden Überlegungen basieren auf im Web verfügbaren Informationen, Diskussionen mit Kollegen, und eigenen Betrachtungen. Ich erhebe keinen Anspruch auf Gültigkeit; jeder mag sich seine eigene Meinung bilden.

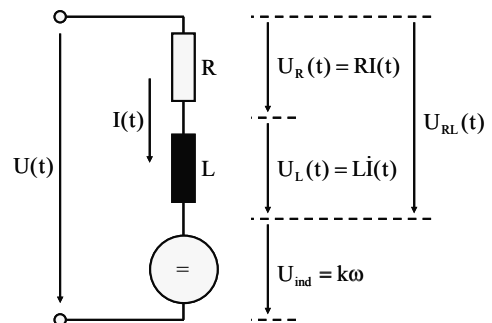
1. Die Motorgleichungen

Die Eigenschaften eines Elektromotors werden üblicherweise durch die Bewegungsgleichungen

$$M(t) = k_M I(t) - M_v(t) - J \frac{d}{dt} \omega(t), \quad (1.1a)$$

$$U(t) = k_U \omega(t) + RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t), \quad (1.1b)$$

beschrieben. M ist das nutzbare mechanische Drehmoment, M_v fasst die Verlustmomente zusammen, J ist das Trägheitsmoment, R der Widerstand und L die Induktivität des Ankers, k_M und k_U sind die Drehmoment- und elektromotorische Konstanten, wobei von $k_M = k_U \equiv k$ ausgegangen wird. Der Motor wird hier als eine Reihenschaltung bestehend aus dem Widerstand R , der Spule L , und einer Spannungsquelle (jedoch mit Verbraucherzählpfeilen) mit einer EMK von $U_{ind} = k_U \omega$ beschrieben, wie im nebenstehenden Ersatzschaltbild gezeigt. Ich werde sprachlich nicht zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω , der Drehfrequenz $f = \omega/(2\pi)$, und der Drehzahl $n = \omega \cdot 30/\pi$ unterscheiden, sondern alle drei mit Drehzahl bezeichnen.



Zu diesen Gleichungen bzw. deren Gültigkeit gibt es einiges zu sagen. Ich finde z.B. die Frage für welche Bedingungen $k_M = k_U$ gilt interessant. Eine andere, offensichtlichere Frage ist welche

Effekte zu M_V beitragen. Dies bestimmt wesentlich welche Abhängigkeit von der Drehzahl ω sich ergibt, und ist für praktische Anwendungen relevant. Die kleinen in Koaxialhelikopter eingesetzten „brushed“ Motoren werden meines Erachtens gut durch ein drehzahlunabhängiges M_V beschrieben (insbesondere wenn man das Getriebe als zum Motor dazugehörend betrachtet), während für „brushless“ Motoren nach [2] besser eine lineare Drehzahlabhängigkeit angenommen wird. Weiterhin kann es auch nötig sein das elektrische Ersatzschaltbild zu verfeinern. Bei „brushed“ Motoren ist z.B. der Spannungsabfall über die Bürsten zu bedenken, der anscheinend jedoch ebenso häufig vernachlässigt wie mit berücksichtigt wird. In manchen Fällen sind auch Kapazitäten, oder ein Widerstand parallel zur Quelle U_{ind} einzuführen. Andererseits kann in der Gl. (1.1a) der Trägheitsterm häufig ignoriert werden. Das Trägheitsmoment J des Ankers ist in der Regel klein, so dass der Motor entweder relativ schnell seine Solldrehzahl bei einer Spannungsänderung erreicht (im Fall einer drehzahlunabhängigen Drehmomentlast, siehe [1]) oder der Trägheitsterm gegenüber dem anliegenden Lastdrehmoment vernachlässigbar klein ist (z.B. im Fall eines Modellhelikopters)(bei Multikoptern kommt es allerdings auf eine schnelle Responsezeit an und J wird wichtig). Im stationären Fall kann der Term mit J in jedem Fall vernachlässigt werden (*vide infra*).

Die für dieses Manuskript jedoch wichtigste Betrachtung zur Gültigkeit bezieht sich auf die unterschiedlichen relevanten Zeitskalen. Im Prinzip gilt Gl. (1.1) zu jedem Zeitpunkt während der Drehung des Motors. Die zeitlichen Änderungen der Spannungen, des Stroms, und der Drehzahl während einer Umdrehung sind jedoch für die Praxis nicht von großem Interesse, und die Gleichungen werden daher in gewissem Sinne zeitlich gemittelt (z.B. über eine Umdrehung). Dementsprechend sind die in Gl. (1.1) vorkommenden Größen auch als Mittelwerte zu verstehen. Für den Gleichspannungsbetrieb ist dies eine sinnvolle und gerechtfertigte Vereinfachung. Betrachten wir z.B. einen typischen „brushed“ Motor mit 3 Nuten bei einer Drehzahl von 20000 U/min. Die induzierte Spannung und dementsprechend der Strom und die Winkelgeschwindigkeit variieren daher in einer Zeit von etwa $1/(3f) = 1$ ms. Die Gleichspannung mit der der Motor gesteuert wird, wird in der Praxis jedoch (meist) wesentlich langsamer geändert, z.B. auf einer Zeitskala von einigen 10 ms. Obwohl der Strom also zeitlich nicht wirklich konstant ist weißt er doch nur sehr schnelle und damit kleine Abweichungen vom Mittelwert über eine Umdrehung auf. Der induktive Term in Gl. (1.1b) kann unter diesen Bedingungen offensichtlich vernachlässigt werden.

Diese Überlegungen führen auf die Motorgleichungen in der wohl am meisten zitierten Form:

$$M = kI - M_V, \quad (1.2a)$$

$$U = k\omega + RI, \quad (1.2b)$$

wobei die Größen U , I , M , und ω eine langsame zeitliche Änderung erfahren dürfen (langsam im Vergleich zur Drehzahl). Die Leistungsbilanz ergibt sich dann zu

$$P_{mech} = P_{el} - RI^2 - P_V. \quad (1.3)$$

Hierbei ist $P_{mech} = M\omega$ die abgegebene mechanische Leistung, $P_{el} = UI$ die zugeführte elektrische Leistung, und P_V die Verlustleistung.

Aus der Überlegung zu den Zeitskalen ergibt sich sofort, dass man bei einer getakteten Ansteuerung des Motors gründlich überlegen muss inwieweit Gln. (1.2) und (1.3) noch benutzt werden dürfen. Tatsächlich ist nicht nur die Rolle des induktiven Terms zu betrachten, sondern

auch zu hinterfragen ob die Mittelung der Gl. (1.1) über eine Umdrehung überhaupt noch gerechtfertigt ist. Für z.B. eine PWM Frequenz von 4 kHz ändert sich die Spannung auf einer Zeitskala von 0.25 ms, und damit sogar schneller als wie sich eine Nut des Ankers an einem Magnetpol vorbei bewegt. Bei einem „brushless“ Motor, welcher typischerweise 6 oder mehr Nuten aufweist, nähern sich die Zeitskalen an, in keinem Fall jedoch erscheint eine Mittelung im obigen Sinne gerechtfertigt. Dies bedeutet, dass im Prinzip jedes Detail des Aufbaus des Motors in den Überlegungen mit zu berücksichtigen ist. Dies erscheint hoffnungslos, und dementsprechend werden im Folgenden die zeitlichen Variationen während einer Umdrehung des Motors vernachlässigt. Ich möchte jedoch betonen, dass dies eine unkontrollierte Näherung ist, deren Gültigkeit bis auf weiteres unklar ist (dazu müsste eine allgemeingültigerer Rechnung als die unten ausgeführte gefunden werden).

Weitergehendere, im Web verfügbare Literatur zu den Motorgleichungen:

[1] <http://www.ieap.uni-kiel.de/surface/ag-berndt/lehre/aprakt/teil-2/motor.pdf>

[2] <http://www.powercroco.de/Modellierung-Theorie2.doc>

2. Formulierung des Problems

Im Folgenden soll uns das Anlaufverhalten nicht weiter interessieren, d.h., es wird der stationäre Fall betrachtet. Die resultierenden Ergebnisse sollten jedoch auch für langsame Änderungen z.B. des PWM Taktverhältnis sinnvoll sein, wobei langsam wieder in Bezug zur Drehzahl und/oder der PWM Frequenz zu verstehen ist.

Der Motor soll durch die Gleichungen

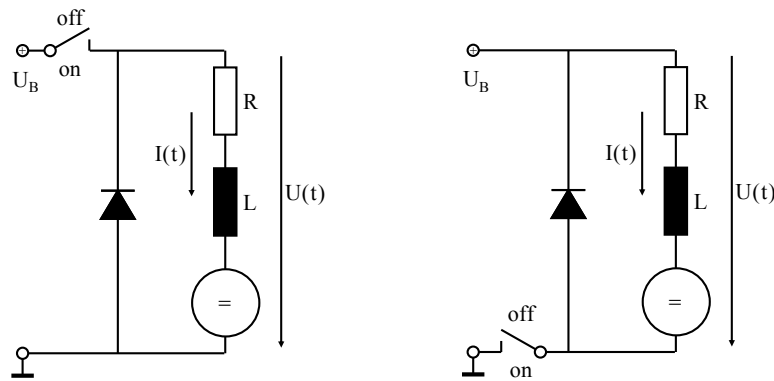
$$M(t) = kI(t) - M_v, \quad (2.1a)$$

$$U(t) = k\omega + RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t), \quad (2.1b)$$

beschrieben werden, wobei wir die zeitlichen Änderungen der Größen U , I , M , und ω während der Drehung des Motors nicht berücksichtigen, wohl aber die zeitlichen Änderungen durch die getaktete Ansteuerung, deren Bestimmung gerade Ziel dieses Texts ist. Wie in Kapitel 1 ausgeführt lässt sich diese Vorgehensweise nicht offensichtlich rechtfertigen. Es ist aber das Einfachste was wir tun können; es bleibt einfach zu hoffen, dass dieses Model trotz der groben Vereinfachungen nützliche Einsichten liefert. Die im Prinzip vorhandenen Drehzahl-schwankungen während einer PWM Periode können sicher vernachlässigt und ω als zeitunabhängig angenommen werden. Mit Gl. (2.1) ergibt sich für die Leistungsbilanz

$$U(t)I(t) = M(t)\omega + M_v\omega + RI^2(t) + LI(t) \frac{d}{dt} I(t). \quad (2.2)$$

In einer realen PWM Ansteuerung ist eine Freilaufdiode unverzichtbar, deren Effekt ist daher mit zu berücksichtigen. Es wird jedoch eine ideale Diode angenommen, genauso wie ein idealer PWM „Schalter“. Letzterer befindet sich wegen technischer Vorteile zumeist in der Zuleitung zur Masse ("low-side"), kann aber im Prinzip ebenso gut auch "high-side" sein. Die entsprechenden elektrischen Schaltbilder sind nachstehend skizziert (links: low-side, rechts: high-side).



Die PWM wird durch die drei Größen

- T: Periodendauer
- DT: Dauer der ON Phase
- U_B : Spannung während der ON Phase

charakterisiert. Die Spannung während der OFF Phase bedarf wegen des Einfluss der Diode genauerer Überlegungen, da sie im Prinzip jeden Wert ≥ 0 V annehmen kann. Die ON und OFF

$$I: 0 \leq t \leq DT, \quad II: DT \leq t \leq T, \quad DC \equiv DT/T,$$

ein. Vorrangig interessiert uns der mittlere Strom in Abhängigkeit vom Taktverhältnis der PWM. Hierbei ist der Mittelwert über eine PWM Periode gemeint (nicht zu verwechseln mit der in Kapitel 1 diskutierten Mittelung über eine Umdrehung des Motors). Für den mittleren Strom gilt

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt, \quad (2.3)$$

und ganz entsprechend für andere Größen. Neben den Mittelwerten ist aber natürlich auch der genaue Zeitverlauf von Interesse. Für den stationären Zustand sind die verschiedenen Größen periodisch mit der PWM Periode T. Für den Strom z.B. gilt $I(T + t) = I(t)$, und insbesondere

$$I(T) = I_0, \quad (2.4)$$

wobei I_0 der Strom zur Zeit $t = 0$ ist, also $I_0 \equiv I(0)$. Analoges gilt für andere Größen.

Neben den Größen k , R und M_V wird für das Motorverhalten im PWM Betrieb nun auch die Induktivität L bzw. die Zeitkonstante $\tau = L/R$ bedeutend. Tatsächlich spielt das Verhältnis zur PWM Periode, also τ/T , die entscheidende Rolle (*vide infra*). Wir merken uns:

Die Einheit aus Motor+Regler+Akku ist durch die Größen U_B , k , R , M_V , und τ/T charakterisiert.

In den folgenden Kapiteln werden die Mittelwerte und zeitlichen Verläufe von U und I diskutiert (der M -Verlauf ergibt sich aus Gl. (2.1a)), für die sich letztlich einfache Resultate ergeben. Die Leistungsbilanz ist deutlich komplizierter. An manchen Stellen sind zusätzliche Betrachtungen als Bemerkungen eingefügt; diese sind für den Fortlauf des Texts aber nicht erheblich.

3. Allgemeines Ergebnis für die Mittelwerte

Die Motorgleichung für die Mittelwerte lässt sich vielleicht verblüffend einfach ableiten. Mittels der Gln. (2.1b) und (2.3) ergibt sich der Mittelwert der Spannung zu:

$$\bar{U} \stackrel{\text{Gl.(2.3)}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt \stackrel{\text{Gl.(2.1b)}}{=} k\omega + R\bar{I} + L \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} I(t) dt. \quad (3.1)$$

Der letzte Term kann mit Hilfe der Substitutionsformel ausgewertet werden. Für eine beliebige Funktion des Stroms $F(I)$ und der dazugehörigen Stammfunktion $G(I)$ gilt nämlich

$$\int_0^T F(I(t)) \frac{d}{dt} I(t) dt = \int_{I(0)}^{I(T)} F(I) dI = G(I(T)) - G(I_0) \stackrel{\text{Gl.(2.4)}}{=} G(I_0) - G(I_0) = 0, \quad (3.2)$$

wobei im letzten Schritt die Periodizität ausgenutzt wurde. Im vorliegenden Fall ist $F(I) = 1$ und $G(I) = I$, und Gl. (3.2) liefert daher

$$\int_0^T \frac{d}{dt} I(t) dt = \int_{I(0)}^{I(T)} dI = I(T) - I_0 \stackrel{\text{Gl.(2.4)}}{=} 0.$$

Damit erhält man bereits das Endresultat für die Motorgleichungen:

$\bar{M} = k\bar{I} - M_v,$	(3.3a)
$\bar{U} = k\omega + R\bar{I}.$	(3.3b)

Die Induktivität fällt aus den Motorgleichungen heraus, und es ergeben sich die Motorgleichungen (1.2) wie für den Gleichstromfall, nur dass die Größen nun als Mittelwerte über eine PWM Periode zu interpretieren sind. Diese Mittelwerte dürfen allerdings, ähnlich wie bei Gl. (1.2), eine langsame zeitliche Änderung erfahren.

Das Substitutionsverfahren ist auch auf die Leistungsbilanz anwendbar. Für die mittlere elektrische Leistung

$$\bar{P}_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{el}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) I(t) dt \stackrel{\text{Gl.(2.1b)}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \left[k\omega I(t) + RI^2(t) + LI(t) \frac{d}{dt} I(t) \right] dt$$

erhält man dann das Ergebnis

$$\bar{P}_{el} = k\omega\bar{I} + R\overline{I^2(t)}. \quad (3.4)$$

Der induktive Term fällt wieder heraus, da sich das entsprechende Integral erneut nach Gl. (3.2) zu Null ergibt (hier ist $F(I) = I$ und $G(I) = 1/2 I^2$):

$$L \int_0^T I(t) \frac{d}{dt} I(t) dt \stackrel{\text{Gl.(3.2)}}{=} L \int_{I(0)}^{I(T)} IdI = \frac{L}{2} [I^2(T) - I^2(0)] \stackrel{\text{Gl.(2.4)}}{=} 0.$$

Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Induktivität ähnlich wie beim mittleren Strom für die Leistungsbilanz irrelevant wäre. Im Gegenteil, da sie den genauen Zeitverlauf des Stroms bestimmt, spielt sie eine wichtige Rolle (*vide infra*), die allerdings von den Details abhängt. Wir können jedoch festhalten, dass der Mittelwert über das Quadrat des Stroms seinen kleinsten Wert genau dann annimmt, wenn der Strom konstant mit der Zeit ist; für alle anderen Fälle nimmt er größere Werte an. Dies kann durch Einführen eines Verlustfaktors η_{PWM} , definiert über

$$\overline{I^2(t)} = \overline{I(t)}^2 \eta_{\text{PWM}}, \quad (3.5)$$

berücksichtigt werden, welcher für konstante Ströme den minimalen Wert $\eta_{\text{PWM}} = 1$ annimmt, und ansonsten größer als 1 ist. Die Leistungsbilanz lässt sich damit formulieren als

$$\boxed{\overline{P}_{\text{el}} = k\omega \overline{I} + R\eta_{\text{PWM}} \overline{I}^2.} \quad (3.6)$$

Der Fall konstanter Ströme bzw. Wert $\eta_{\text{PWM}} = 1$ ergibt sich für sehr große Werte von τ/T (*vide infra*), und stellt den Idealfall dar. Die Gl. (3.6) stellt die Auswirkung der PWM Ansteuerung auf die Leistungsbilanz einprägsam dar. Allerdings hängt der Verlustfaktor in komplizierter Weise von den Motoreigenschaften und dem Taktverhältnis DC ab. Wir fassen zusammen:

Für den mittleren Strom, die mittlere Spannung, und das mittlere Drehmoment gelten die gleichen Beziehungen wie für den Gleichstrombetrieb. Für die Leistungsbilanz ergibt sich ebenfalls eine ähnliche Formel, in der allerdings der Widerstand R um einen Faktor η_{PWM} vergrößert erscheint. Für sehr große Induktivitäten bzw. Verhältnisse τ/T nimmt η_{PWM} den idealen Wert $\eta_{\text{PWM}} = 1$ an.

Bei der Anwendung der Motorgleichungen ist zu bedenken, dass die mittlere Spannung \overline{U} aufgrund der Wirkung der Diode nicht notwendigerweise der mittleren "Batteriespannung"

$$\overline{U}_B = U_B \text{DC} \quad (3.7)$$

entspricht (*vide infra*). Wir halten als wichtiges Ergebnis fest:

Im Gegensatz zum Gleichstrombetrieb ist die Spannung keine "gute" Steuergröße, sondern das Taktverhältnis DC. Die für das Motorverhalten wirksame bzw. in die Motorgleichungen einzusetzende mittlere Spannung \overline{U} entspricht i.A. NICHT der mittleren Batteriespannung \overline{U}_B .

Bemerkungen:

(1) In Kapitel 2 wurde angenommen, dass die Drehzahl ω konstant während einer PWM Periode ist. In Anbetracht der Rechnung ist aber offensichtlich, dass diese Bedingung für Gl. (3.3) fallen gelassen werden kann; ω ist dann ebenfalls als Mittelwert über eine PWM Periode zu verstehen.

(2) Nach dem gleichen Argument welches dazu führte dass die Induktivität aus den Motorgleichungen heraus fällt, ergibt sich auch dass sich der Trägheitsterm in Gl. (1.1a) zu Null mittelt, womit dessen Vernachlässigung strikt gerechtfertigt ist.

(3) Die obigen Ergebnisse basieren auf der Substitutionsregel, deren Anwendbarkeit ist also genauer zu prüfen. In der Standardliteratur wird als Bedingung gefordert, dass $F(I(t))$ stetig und vor allem $I(t)$ stetig differenzierbar ist. In Anbetracht dessen dass z.B. Schalter ein und ausgeschaltet werden erscheint dies nicht erfüllt. Die Stetigkeit von $I(t)$ ergibt sich jedoch aus folgender Überlegung. Würde die in der Spule gespeicherte Energie $E_L = 1/2LI^2$ in verschwindend kurzer Zeit geändert werden, wäre dazu eine unendlich große Leistung erforderlich bzw. würde frei werden. Bei jedem Schaltvorgang bleibt also die Energie in der Spule konstant, und damit der Strom $I(t)$ durch die Spule stetig, und damit auch $F(I(t))$. Der Stromverlauf $I(t)$ weist i.A. jedoch an diesen Stellen „Knicke“ auf und ist damit nicht überall stetig differenzierbar. Allerdings lässt sich das Integral in die einzelnen Bereiche auftrennen, und für diese Bereiche getrennt behandeln. Für z.B. den Fall mit Stromlücke (*vide infra*) kann das Integral in drei Bereiche aufgetrennt werden und die Integrale für die ersten beiden Bereiche mit der Substitutionsregel berechnet werden. Für das Integral über den dritten Bereich ergibt sich trivial Null da der Strom Null ist und damit auch die Ableitung. Also

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dI}{dt} dt &= \int_0^{DT} \frac{dI}{dt} dt + \int_{DT}^{T^*} \frac{dI}{dt} dt + \int_{T^*}^T \frac{dI}{dt} dt \stackrel{\text{Gl.(9)}}{=} I(DT) - I(I_0) + I(T^*) - I(DT) + \int_{T^*}^T \frac{dI}{dt} dt \\ &= I(T^*) - I(I_0) = 0 \end{aligned}$$

Es ist also ausreichend das $I(t)$ stückweise stetig differenzierbar ist, und in jedem Stück entweder eindeutig umkehrbar oder identisch Null ist. Diese Bedingungen sind erfüllt, und damit die Substitutionsregel anwendbar.

(4) Das Ergebnis (10b) lässt sich, vielleicht sogar schneller, auch über eine Fourier-Reihenentwicklung gewinnen. Für z.B. den Strom wird geschrieben

$$I(t) = \sum i_n e^{in\Omega t},$$

wobei $\Omega = 2\pi/T$ die Frequenz der PWM, und der Mittelwert des Stroms durch die Komponente i_0 bei der Frequenz $n\Omega = 0$ gegeben ist. Analoges gilt für die Spannung. Aus Gl. (2.1b) ergibt sich die Beziehung zwischen den Fourier-Komponenten i_n und u_n des Stroms und der Spannung,

$$i_n = \frac{u_n - k\omega}{R + in\Omega L},$$

und für die Mittelwerte daher sofort $i_0 = (u_0 - k\omega)/R$, und damit Gl. (3.30b). Diese Methode funktioniert allerdings nur solange die "Koeffizienten" konstant sind, d.h., gilt nur für den Fall ohne Stromlücke (*vide infra*). Für diesen Fall lässt sich dafür Gl. (3.3b) allgemeiner fassen:

(i) liegt anstatt des RL Glieds eine beliebige (komplexe) Impedanz $Z(\Omega)$ vor, dann verallgemeinert sich Gl. (3.3b) zu

$$\bar{U} = k\omega + Z(0)\bar{I}.$$

(ii) Gl. (3.3b) gilt nicht nur für einen PWM Spannungsverlauf, sondern für beliebige (periodische) Spannungsverläufe $U(t)$.

Weitergehendere, im Web verfügbare Literatur zur Substitutionsregel:

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Integration_durch_Substitution

4. Zeitverlauf des Stroms und der Spannung

Der Strom- und Spannungsverlauf beim PWM Betrieb eines Elektromotors kann relativ leicht bestimmt werden. Ich fand es nützlich zuerst die Situation ohne Diode und Motorgegenspannung, also das Verhalten einer RL Reihenschaltung (RL Glied), zu betrachten. Die diesbezüglichen Ergebnisse sind im Appendix zusammengefasst; an einigen Stellen wird hier darauf verwiesen.

Zur Einstimmung sind in den Bildern unten, für die Beispielwerte $R = 0.5 \Omega$, $L = 50 \mu\text{H}$, $1/T = 4 \text{ kHz}$, $\tau/T = 0.4$, $U_B = 7.5 \text{ V}$, und $k\omega = 5 \text{ V}$, die Zeitverläufe für Strom und Spannung für $DC = 0.5$ und $DC = 0.9$ dargestellt. Zusätzlich sind einige charakteristische Größen eingezeichnet. Im rechten Bild ist der für ein RL Glied erwartete Stromverlauf bestehend aus Lade- und Entladekurve zu beobachten. Demgegenüber ist im linken Bild eine Stromlücke mit $I = 0$ zu erkennen. Hier zerfällt die OFF Phase in die zwei Bereiche II und III, entsprechend

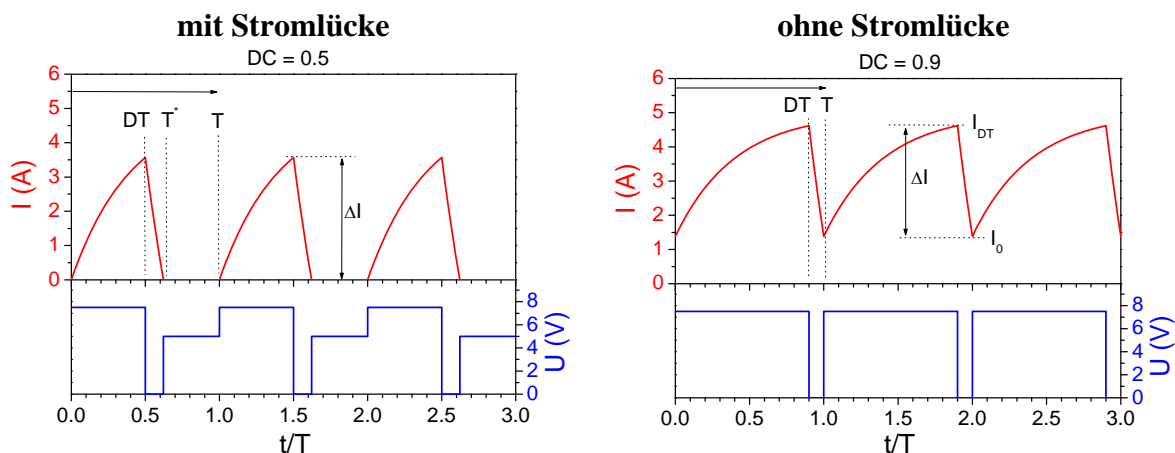
$$\text{II: } DT \leq t \leq T^*, \quad \text{III: } T^* \leq t \leq T, \quad DC^* \equiv T^* / T,$$

wobei T^* die Zeit zu der der Strom Null wird bezeichnet, und DC^* eingeführt wurde. Tritt keine Stromlücke auf, sprechen wir vom Fall "ohne Stromlücke", andernfalls vom Fall "mit Stromlücke" (auf eine Stromlücke wurde ich als erstes von Helmut Schenk hingewiesen, mein Dank dafür, ich habe seinen Sprachgebrauch hier übernommen). In beiden Fällen ist der Strom stetig sowie stückweise stetig differenzierbar, und die Substitutionsregel anwendbar. In beiden Fällen gelten also die Ergebnisse aus Kapitel 3, insbesondere die Motorgleichung (3.3) und Leistungsbilanz (3.6). Es ist jedoch zu beachten, dass sich unterschiedliche Werte für die mittlere Spannung ergeben:

$$\text{ohne Stromlücke: } \bar{U} = U_B DC, \quad (4.1a)$$

$$\text{mit Stromlücke: } \bar{U} = U_B DC + k\omega(1 - DC^*) \quad (4.1b)$$

Nur im Fall ohne Stromlücke entspricht die mittlere Spannung der mittleren Batteriespannung \bar{U}_B , im Fall einer Stromlücke ist sie (bei gleichem Taktverhältnis) größer als \bar{U}_B .



Die angedeuteten Zeitverläufe erklären sich folgendermaßen: Entsprechend unseren Annahmen ist die Drehzahl des Motors während einer PWM Periode konstant, und damit auch $U_{\text{ind}} = k\omega$. Es ist also Gl. (2.1b), bzw. umgestellt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} I(t) = -\frac{I(t)}{\tau} + \frac{U(t) - k\omega}{L} \quad (4.2a)$$

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (4.2b)$$

zu lösen, welche der eines RL-Glieds mit anliegender Spannung $U_{\text{RL}}(t) = U(t) - k\omega$ entspricht, wobei jedoch die Wirkung des Schalters und der Diode noch zu berücksichtigen ist.

In der ON Phase I ist die Situation einfach. Der Schalter ist geschlossen, die Spannung über dem Motor ist gleich der Batteriespannung, $U = U_B$, und die Diode ist im gesperrten Zustand und kann ignoriert werden. Für diesen Zeitbereich verhält sich das System genau wie ein RL Glied an dem die (konstante) Spannung $U_{\text{RL}} = U_B - k\omega$ anliegt.

In der OFF Phase II ist zu bedenken, dass der Strom durch die Spule bei Schaltvorgängen stetig verläuft (siehe Bemerkung (4) im vorhergehenden Kapitel). Der Strom durch die Spule kurz vor dem Ausschalten ist aus der Lösung für Phase I bekannt; er entspricht I_{DT} . Kurz nach dem Ausschalten fließt dieser Strom weiter, aber nun durch den Stromkreis bestehend aus R , L , der Spannungsquelle $k\omega$, und dem Widerstand R_D über die (gesperrte) Diode. Dieser Strom fließt aus Sicht der Diode in Vorwärtsrichtung, so dass diese durchschalten wird. Alternativ können wir argumentieren, dass eine große negative Spannung von etwa $-R_D I_{\text{DT}}$ an der Diode abfällt, und diese daher durchschaltet. Ist die Schaltzeit der Diode nun erheblich kürzer als die Zeitskala $\tau_D \approx L/R_D$ auf der der Strom abklingt, dann wird bis zum Durchschalten nur sehr wenig der in der Spule gespeicherten Energie abgebaut. Im Idealfall, der hier angenommen wird, ist die Schaltzeit verschwindend gering, so dass (a) direkt nach dem Öffnen des Schalters die Spannung Null wird, $U = 0$, und (b) der Strom I_{DT} unvermindert über die Spule fließt. In diesem Fall verhält sich das System wieder wie ein RL Glied an dem die Spannung $U_{\text{RL}} = -k\omega$ abfällt.

Im weiteren Verlauf kann es nun passieren, da U_{RL} negativ ist, dass der Strom durch Null laufen und seine Flussrichtung umkehren würde. In diesem Moment, dem Zeitpunkt T^* , wird die Diode jedoch wieder sperren und jeglichen weiteren Stromfluss unterbinden. Bei diesem Abschaltvorgang tritt kein Sprung des Stroms auf, da vorher und nachher $I = 0$ ist, allerdings tritt ein Sprung in der Spannung auf. Direkt nach dem Abschalten ist noch Energie in der Spule gespeichert, welche auf der Zeitskala $\tau_D \approx L/R_D$ abgebaut und der stationäre Zustand sehr schnell erreicht wird. In diesem Zustand ist der Strom durch und die Spannung über die Spule Null, also $U_{\text{RL}} = 0$. Alternativ können wir argumentieren, dass nach dem Schaltvorgang wegen $I = 0$ auch $dI/dt = 0$ gilt und nach Gl. (4.1a) $U = k\omega$ ist. Kurz vor dem Schaltvorgang gilt $dI/dt = -k\omega/L$, d.h. der Sprung in der Steigung des Stroms geht mit einem Sprung in der Spannung einher.

Für den Stromverlauf können für den Fall ohne Stromlücke alle Ergebnisse (die sich nicht auf Mittelwerte beziehen) des Appendix für die zwei Bereiche I und II direkt mit $U_0 = U_B - k\omega$ und $U_1 = -k\omega$ übernommen werden. Für den Fall mit Stromlücke ist zusätzlich zu bedenken, dass $I_0 = 0$ gilt und der Bereich II nur bis zum Abschalten der Diode zur Zeit T^* durchlaufen wird. Daher ist in allen Ergebnissen des Appendix T durch T^* zu ersetzen. Für die zwei Fälle resultieren die Ergebnisse:

ohne Stromlücke:

$$\text{I: } 0 \leq t \leq DT, \quad U = U_B, \quad I(t) = \frac{U_B - k\omega}{R} - \frac{U_B}{R} \left(\frac{1 - e^{-\frac{T-DT}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.3a)$$

$$\text{II: } DT \leq t \leq T, \quad U = 0, \quad I(t) = -\frac{k\omega}{R} + \frac{U_B}{R} \left(\frac{e^{-\frac{DT}{\tau}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.3b)$$

$$\Delta I = \frac{U_B}{R} \frac{\left(1 - e^{-\frac{DT}{\tau}}\right) \left(1 - e^{-\frac{T-DT}{\tau}}\right)}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{U_B}{R} \frac{2 \sinh\left(\frac{T}{2\tau} DC\right) \sinh\left(\frac{T}{2\tau} (1 - DC)\right)}{\sinh\left(\frac{T}{2\tau}\right)} \quad (4.3c)$$

mit Stromlücke:

$$\text{I: } 0 \leq t \leq DT, \quad U = U_B, \quad I(t) = \frac{U_B - k\omega}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (4.4a)$$

$$\text{II: } DT \leq t \leq T^*, \quad U = 0, \quad I(t) = -\frac{k\omega}{R} + \left(\frac{U_B}{R} e^{-\frac{DT}{\tau}} - \frac{U_B - k\omega}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k\omega}{R} \left(e^{-\frac{T^*-t}{\tau}} - 1 \right) \quad (4.4b)$$

$$\text{III: } T^* \leq t \leq T, \quad U = k\omega, \quad I(t) = 0 \quad (4.4c)$$

$$\Delta I = \frac{U_B - k\omega}{R} \left(1 - e^{-\frac{DT}{\tau}}\right) \quad (4.4d)$$

Bemerkungen:

(1) Diese Ergebnisse gelten identisch für low-side und high-side Ansteuerungen.

(2) Da die Spannung U_{RL} über das RL Glied in Phase III Null sein muss lässt sich auch mit dem allgemeinen Ergebnis Gl. (3.3b) und den Ergebnissen des Appendix, z.B. Gl. (A.14) wenn sich auf die Spannung über das RL Glied bezogen wird, ableiten. Die unbekannte Spannung in der Phase III soll mit U_2 bezeichnet werden. Für den Mittelwert der Spannung gilt dann

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \left[U_0 DT + U_1 (T^* - DT) + U_2 (T - T^*) \right].$$

Das im Mittelwert des Stroms auftauchende Integral kann mit den Ergebnissen Gl. (A.8) bis (A.10) direkt angegeben werden, wobei zu bedenken ist, dass Phase II nur bis zur Zeit T^* andauert, und natürlich dass der Strom in Phase III Null ist:

$$\int_0^T Idt = \int_0^{DT} Idt + \int_{DT}^{T^*} Idt \stackrel{\text{Gl. (A.8, A.9)}}{=} A \cdot DT + B(T^* - DT).$$

Zusammen mit den Werten für die Konstanten A und B ergibt sich damit

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T I dt = \frac{1}{T} \left[\frac{U_0}{R} DT + \frac{U_1}{R} (T^* - DT) \right].$$

Der Vergleich mit dem Ausdruck für die Spannung zeigt, dass $U_2 = 0$ gelten muss.

Es ist nun noch die Frage zu klären, unter welchen Bedingungen Phase III bzw. eine Stromlücke auftritt. Das Kriterium hierfür kann auf zwei Weisen formuliert werden. Offensichtlich tritt eine Stromlücke dann auf, wenn der Strom in Phase II durch Null laufen würde. Ein Kriterium zur Bestimmung von T^* wäre also $I(T^*) = 0$. Für die Lösung können wir z.B. $t = T^*$ in Gl. (4.3b) einsetzen. Ein alternatives Kriterium ergibt sich aus der Überlegung, dass der Strom stetig und zur Zeit T^* gleich Null ist, allerdings einen "Knick" aufweist. Die Steigung des Stroms kurz vor dem Sperren der Diode ist durch die Differentialgleichung (4.2) gegeben, also $di/dt(T^*) = -k\omega/L$. Beide Kriterien führen zu identischen Ergebnissen. Als Bestimmungsgleichung für T^* bzw. DC^* ergibt sich

$$\boxed{\frac{e^{\frac{T_{DC}^*}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T_{DC}}{\tau}} - 1} = \frac{U_B}{k\omega} \quad \text{bzw.} \quad DC^* = \frac{\tau}{T} \ln \left[1 + \frac{U_B}{k\omega} \left(e^{\frac{T_{DC}}{\tau}} - 1 \right) \right]}, \quad (4.5)}$$

wobei $T^* \geq T$ bzw. $DC^* \geq 1$ bedeutet, dass keine Stromlücke auftritt.

Der Wert von T^* bzw. DC^* hängt von den drei Größen DC , $k\omega/U_B$, und τ/T ab, was die Diskussion unübersichtlich macht. Für die Grenzfälle sehr kleiner und großer Werte von τ/T bzw. der Induktivität ergibt sich

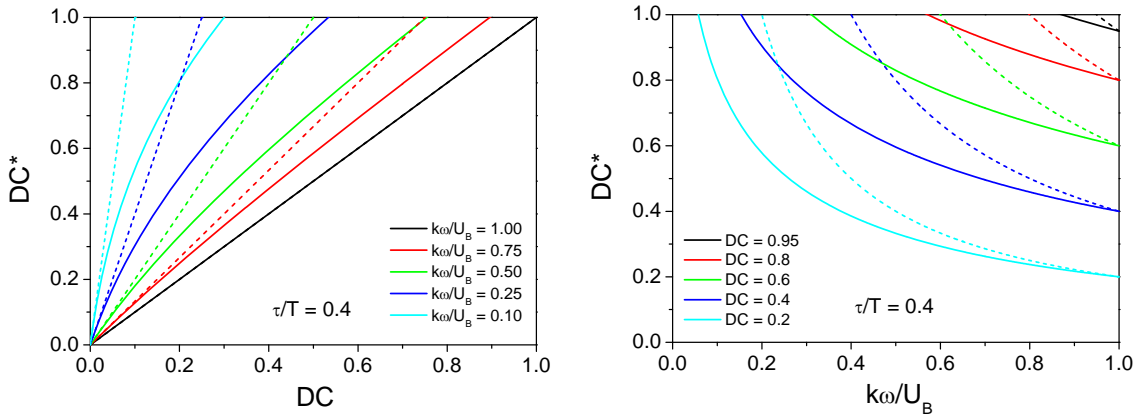
$$\tau/T \rightarrow 0: \quad DC^* = DC - \frac{\tau}{T} \ln \left(\frac{k\omega}{U_B} \right) - \frac{\tau}{T} \left(1 - \frac{k\omega}{U_B} \right) e^{-\frac{T}{\tau} DC} + O \left(\left(e^{-\frac{T}{\tau} DC} \right)^2 \right), \quad (4.6a)$$

$$\tau/T \rightarrow \infty: \quad DC^* = \frac{U_B}{k\omega} DC \left[1 - \frac{T}{2\tau} \left(\frac{U_B}{k\omega} - 1 \right) DC \right] + O(\tau^{-2}). \quad (4.6b)$$

Im Fall kleiner Induktivität ist DC^* bis auf eine logarithmische Korrektur praktisch gleich dem Taktverhältnis DC , d.h., der Stromverlauf in der OFF Phase ist fast immer und fast vollständig durch eine Stromlücke charakterisiert. Im Volllastbereich ($DC \approx 1$) verschwindet die Stromlücke.

Im Fall großer Induktivität ist DC^* proportional zu $U_B DC/k\omega$. Da $k\omega$ kleiner als $U_B DC$ ist, gilt $DC^* > 1$, d.h., es tritt keine Stromlücke auf (im Fall ohne Stromlücke ist $U_B DC$ die mittlere Spannung, für die nach der Motorgleichung (3.3b) $k\omega < U_B DC$ gilt). Nur im Leerlaufbereich tritt möglicherweise eine Stromlücke auf.

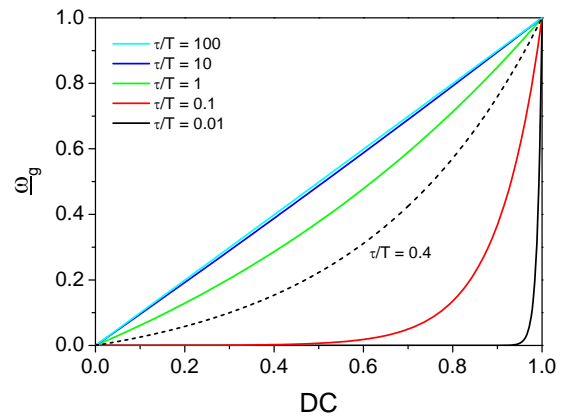
Im Zwischenbereich ist die Situation komplizierter. In den Bildern unten ist für das Beispiel $\tau/T = 0.4$ der Verlauf von DC^* als Funktion von DC (linkes Bild) bzw. $k\omega/U_B$ (rechtes Bild) für einige Werte von $k\omega/U_B$ bzw. DC gezeigt. Zum Vergleich ist der Verlauf für den Idealfall $\tau/T \rightarrow \infty$ gestrichelt eingezeichnet. Im praktisch gesamten Bereich ergibt sich eine Stromlücke, nur für nicht zu große $k\omega/U_B$ und/oder $DC \rightarrow 1$ erhält man den lückenfreien Fall (der Bereich mit Stromlücke ist anhand von $DC^* < 1$ zu erkennen, der ohne Stromlücke entsprechend an $DC^* > 1$).



Das Auftreten einer Stromlücke ist bestimmt durch $T^* = T$ bzw. $DC^* = 1$. Für jeden Wert von τ/T ergibt sich dadurch eine Grenzkurve, die $k\omega/U_B$ mit DC verknüpft. Dieser Grenzwert für $k\omega/U_B$ soll als $\underline{\omega}_g$ bezeichnet werden (der Unterstrich wird in Kapitel 6 klarer). Aus Gl. (4.5) folgt:

$$\underline{\omega}_g(DC, \tau/T) = \frac{e^{\frac{T}{\tau}DC} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1}. \quad (4.7)$$

Im nebenstehenden Bild sind die Grenzkurven für einige Werte von τ/T gezeigt. Befindet man sich in diesem Diagramm *unterhalb* der jeweiligen Grenzkurve, tritt *keine* Stromlücke auf, befindet man sich *oberhalb* liegt der Fall *mit* Stromlücke vor. Es ist gut zu erkennen, dass sich für eine sehr kleine Induktivität (kleines τ/T) außer im Volllastbereich praktisch immer eine Stromlücke ergibt, während sich für eine sehr große Induktivität (großes τ/T) eine Stromlücke vor allem im Zwischenbereich ergibt. Im Zwischenbereich hängt die Situation bei den relevanten Taktverhältnissen $DC > 0.5$ vom genauen Verhältnis $k\omega/U_B$ ab, d.h. von der Last. In der Praxis ist U_B vorgegeben, und die Grenzkurve daher faktisch mit einer Grenzdrehzahl $\underline{\omega}_g \equiv U_B \underline{\omega}_g / k$ verknüpft. Es gilt:



Für $\omega > \underline{\omega}_g$ liegt der Fall mit Stromlücke und für $\omega < \underline{\omega}_g$ der Fall ohne Stromlücke vor.

Für die Grenzfälle kleiner und großer Werte von τ/T ergibt sich

$$\tau/T \rightarrow 0: \quad \underline{\omega}_g(DC) \approx e^{-\frac{T}{\tau}(1-DC)}, \quad (4.8a)$$

$$\tau/T \rightarrow \infty: \quad \underline{\omega}_g(DC) = DC - \frac{T}{2\tau} DC(1-DC) + O(\tau^{-2}). \quad (4.8b)$$

5. Leistungsbilanz

Mit den Ergebnissen des Appendix könnte für den Fall ohne Stromlücke die Leistungsbilanz bestimmt werden. Für den Fall mit Stromlücke ist dieser Weg jedoch mühselig, und die mittlere Leistung wird daher direkt über

$$\bar{P}_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{U_B}{T} \int_0^{DT} I(t)dt \quad (5.1)$$

und den aus Gln. (4.3) und (4.4) bekannten Stromverläufen berechnet. Gleichung (5.1) gilt sowohl für den Fall ohne als auch mit Stromlücke, da in der OFF Phase entweder die Spannung oder der Strom Null ist. Das Ergebnis lässt sich schreiben als

$$\boxed{\bar{P}_{el} = \frac{U_B^2}{R} \left(1 - \frac{k\omega}{U_B}\right) DC - \frac{\tau}{T} U_B \Delta I,} \quad (5.2)$$

welches in dieser Form für beide Fälle gilt, natürlich mit den jeweiligen Ausdrücken für den Stromhub ΔI , Gln. (4.3c) bzw. (4.4d).

Für die Leistungsbilanz in der allgemeinen Form Gl. (3.6), bzw. dem Verlustfaktor η_{PWM} konnte ich für den Fall mit Stromlücke keinen "nützlichen" Ausdruck finden. Für den Fall ohne Stromlücke erhält man mit Gl. (4.3c), Gl. (5.2), und der Motorgleichung das Ergebnis

$$\eta_{PWM} = 1 + \frac{1 - DC}{DC} \left(1 - \frac{k\omega}{U_B}\right)^{-2} K(DC, \tau/T), \quad (5.3a)$$

$$K(DC, \tau/T) \equiv 1 - \frac{2\tau \sinh\left(\frac{\tau}{2\tau} DC\right) \sinh\left(\frac{\tau}{2\tau} (1 - DC)\right)}{T DC(1 - DC) \sinh\left(\frac{\tau}{2\tau}\right)}, \quad (5.3b)$$

wobei die dimensionslose Funktion $K(DC, \tau/T)$ eingeführt wurde, welche den Effekt des Verhältnis τ/T bzw. der Induktivität in der Leistungsbilanz beschreibt, und Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Diese Funktion wird im Appendix im Detail diskutiert. Hier wird nur zitiert, dass für $\tau/T \geq 0.1$ der Verlustfaktor mit ausreichender Genauigkeit beschrieben werden kann durch

$$\eta_{PWM} \approx 1 + \left(\frac{1}{12} \frac{T}{\tau}\right)^2 (1 - DC)^2 \left(1 - \frac{k\omega}{U_B}\right)^{-2}. \quad (5.4)$$

Bemerkungen:

(1) Für den Fall ohne Stromlücke ergibt sich die Leistungsbilanz auch leicht mit den Ergebnissen des Appendix. Wegen $U(t) = k\omega + U_{RL}(t)$ gilt

$$\bar{P}_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = k\omega \bar{I} + \frac{1}{T} \int_0^T U_{RL}(t)I(t)dt,$$

und mit $\bar{U} = U_B DC = \bar{U}_B$ für den Fall ohne Stromlücke und den Ausdrücken (A.13) und (A.17b) ergibt sich direkt Gl. (5.3). Man hätte auch direkt Gl. (A.18) ausnutzen können.

(2) Mittels der Leistungsbilanz Gl. (3.6), der Motoregleichung (3.3b), und der Gl. (5.2) ergibt sich der Verlustfaktor η_{PWM} formal zu

$$\eta_{\text{PWM}} = 1 + \frac{U_B (U_B - k\omega) DC - \bar{U} (\bar{U} - k\omega)}{(\bar{U} - k\omega)^2} \left[1 - \frac{\tau}{T} \frac{U_B R \Delta I}{U_B (U_B - k\omega) DC - \bar{U} (\bar{U} - k\omega)} \right].$$

Dieser Ausdruck gilt mit und ohne Stromlücke. Für den Fall ohne Stromlücke erhält man mit $\bar{U} = U_B DC$, ΔI nach Gl. (4.3c), und K nach Gl. (5.3b) genau das Ergebnis Gl. (5.3a).

(3) Ein zu in (2) ähnliches aber für alle Fälle gültiges formales Ergebnis lässt sich auch erhalten, wenn man die Definitionen des nächsten Kapitels nutzt:

$$\eta_{\text{PWM}} = 1 + \frac{\bar{U}_B (U_B - k\omega - \bar{U}_B + k_{\text{PWM}} \omega)}{(\bar{U}_B - k_{\text{PWM}} \omega)^2} \left[1 - \frac{\tau}{T} \frac{R \Delta I}{DC (U_B - k\omega - \bar{U}_B + k_{\text{PWM}} \omega)} \right].$$

6. Motorverhalten

Die Ausführlichkeit der letzten Kapitel mag verschleiert haben, dass sich für das Motorverhalten relativ einfache Gleichungen ergeben, Gln. (3.3a), (3.3b), (4.1) und (4.5). Die Leistungsbilanz ist dagegen kompliziert, und wurde in zweierlei Weise formuliert. Das allgemeine Ergebnis Gl. (3.6) zeigt, dass die benötigte Leistung beim PWM Betrieb größer als beim Gleichspannungsbetrieb ist, sich dieser Mehrbetrag jedoch mit zunehmender Induktivität bzw. PWM Frequenz verringert. Für Rechnungen ist Gl. (5.2) meistens nützlicher. Im Folgenden wird das Motorverhalten ausführlich diskutiert, die Leistungsbilanz wird nur anhand von Graphen dargestellt.

In den Formeln treten eine Reihe von Größen auf: U_B , k , R , τ/T , M_V , DC^* , DC , \bar{I} , \bar{M} und ω . Die ersten fünf Größen sind jedoch Parameter, welche die spezifische Situation charakterisieren, während "nur" die letzten fünf Größen den Betriebszustand des Motors beschreiben. Die Größe DC^* spielt eine Sonderrolle. Sie ist mitentscheidend für den Betriebszustand, kann jedoch nicht direkt vom Anwender beeinflusst werden. Tatsächlich ist es die Hauptschwierigkeit, im Vergleich zum Gleichstrombetrieb, das Verhalten von DC^* zu verstehen, und dessen Wert zu bestimmen. Bezüglich dem Wert von DC^* wird verabredet, dass im Fall *ohne* Stromlücke $DC^* = 1$ gesetzt wird (auch wenn die Bestimmungsgleichung (4.5) einen Wert größer 1 liefert); im Fall *mit* Stromlücke wird natürlich der sich aus Gl. (4.5) ergebende Wert verwendet.

Drei der fünf Parameter, U_B , k und R , können durch Einführen der normierten Größen

$$\underline{\omega} = \frac{k\omega}{U_B}, \quad \underline{I} = \frac{R\bar{I}}{U_B}, \quad \underline{M} = \frac{R\bar{M}}{kU_B}, \quad \underline{P} = \frac{R\bar{P}}{U_B^2}, \quad (6.1)$$

aus den Gleichungen eliminiert werden (dies ist so zu verstehen, dass alle Größen, welche z.B. eine Drehzahl darstellen, auf k/U_B zu normieren sind, alle Ströme auf R/U_B , usw.). Zwischen „natürlichen“ und normierten Größen wird je nach Zweck gewechselt. Das Verlustdrehmoment M_V bewirkt im Motorverhalten keine wesentlichen neuen Aspekte; aus dem Strom lässt sich das Drehmoment immer direkt bestimmen. M_V wird im Folgenden daher als Null angenommen (halb-idealer Motor), so dass $\bar{M} = k\bar{I}$ bzw. $\underline{M} = \underline{I}$ gilt. Damit reduziert sich die Diskussion auf die vier Größen DC^* , DC , \bar{I} und ω (bei gegebenen Parametern U_B , k , R und τ/T), bzw. in normierter Notation auf DC^* , DC , \underline{I} und $\underline{\omega}$ (bei gegebenem Parameter τ/T).

Das allgemeine Ergebnis in Kapitel 3 für die Motorgleichungen suggeriert, dass sich gegenüber dem Gleichspannungsbetrieb keine Unterschiede ergeben. Allerdings zeigt Kapitel 4, dass die mittlere Spannung über dem Motor nur im Fall ohne Stromlücke direkt durch das Taktverhältnis DC bestimmt ist, Gl. (4.1). Mit der „effektiven“ Motorkonstanten $k_{\text{PWM}} \equiv k_{\text{DC}}^*$ ergibt sich die mittlere Spannung \bar{U} zu $\bar{U} = \bar{U}_B + (k - k_{\text{PWM}})\omega$, und die Motorgleichungen werden

$$\bar{M} = k\bar{I} - M_v, \quad (6.2a)$$

$$\bar{U}_B = k_{\text{PWM}}\omega + R\bar{I}. \quad (6.2b)$$

Diese Gleichungen machen das Wesentliche des Motorverhaltens bereits deutlich:

Im *Fall ohne Stromlücke* verhält sich der Motor wie im Gleichspannungsbetrieb, wobei als Spannung $\bar{U}_B = U_B \text{DC}$ einzusetzen ist. Für die Motorgleichungen bevorzuge ich die Schreibweise

$$\bar{M} = k(\bar{I} - \bar{I}_0), \quad k(\omega_0 - \omega) = R(\bar{I} - \bar{I}_0), \quad (6.3)$$

wobei \bar{I}_0 den Leerlaufstrom und ω_0 die Leerlaufdrehzahl bezeichnet.

Im *Fall mit Stromlücke* erniedrigt sich jedoch abhängig vom genauen Betriebszustand die elektromotorische Konstante, ohne dabei die Drehmomentkonstante zu beeinflussen. Der Betriebszustand ist nun zusätzlich durch die Größe DC^* charakterisiert, d.h. durch die Motorgleichung (6.2b) ergänzt um die Bestimmungsgleichung (4.5).

Der Übersichtlichkeit halber werden die für die Diskussion benötigte Motor- und Bestimmungsgleichung nochmals in natürlicher und normierter Form angeschrieben:

$U_B \text{DC} = k\omega \text{DC}^* + R\bar{I} \quad \text{bzw.} \quad \text{DC} = \underline{\omega} \text{DC}^* + \underline{I}, \quad (6.4a)$
$U_B \left(e^{\frac{T}{\tau} \text{DC}} - 1 \right) = k\omega \left(e^{\frac{T}{\tau} \text{DC}^*} - 1 \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(e^{\frac{T}{\tau} \text{DC}} - 1 \right) = \underline{\omega} \left(e^{\frac{T}{\tau} \text{DC}^*} - 1 \right). \quad (6.4b)$

Es wird daran erinnert, dass der Fall *mit* und *ohne* Stromlücke sich daran entscheidet ob die Bestimmungsgleichung $\text{DC}^* < 1$ oder $\text{DC}^* > 1$ liefert, wobei im letzteren Fall die Verabredung gilt, dass der Wert $\text{DC}^* = 1$ in die Motorgleichung einzusetzen ist.

Ist für einen gegebene Betriebszustand der Wert von DC^* bekannt, dann lassen sich alle anderen Größen leicht durch Einsetzen in die Gleichungen bestimmen. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Interessiert man sich z.B. für die Betriebsgrößen bei einer gegebenen Drehzahl ω , dann ergibt sich DC^* direkt aus Gl. (6.4b) bzw. (4.5), und das Problem ist gelöst. Sind jedoch die Betriebsgrößen für ein gegebenes Taktverhältnis DC gesucht, dann müssen die Werte von ω und DC^* selbstkonsistent aus dem Gleichungssystem (6.4) bestimmt werden. Dies ist analytisch nicht möglich, außer in Grenzfällen. Ein graphisches Lösungsverfahren stelle ich unten vor; aber das liefert natürlich keine quantitativen Ergebnisse. So bleibt die numerische oder die näherungsweise Lösung. Ähnliches gilt wenn die Betriebsgrößen für einen gegebenen Strom \bar{I} gesucht werden. Der erste Fall ist einfach (das Motorverhalten lässt sich ohne Aufwand mittels gängiger Darstellungsprogramme visualisieren), und wird daher nur kurz am Ende vor allem anhand von Bildern beschrieben. Der zweite Fall wird ausführlich betrachtet. Die Diskussion wird mit den natürlichen Größen geführt, im Zusammenhang mit Graphen werden normierten Größen benutzt.

Trivialerweise gilt $DC \leq DC^* \leq 1$. Wegen $\bar{I}_0 \geq 0$ ergibt sich aus Gl. (6.4a) die zusätzliche Eingrenzung $U_B DC \geq k\omega DC^*$, bzw.

$$DC \leq DC^* \leq \frac{U_B}{k\omega} DC. \quad (6.5)$$

Nehmen wir nun für den Moment einen vollständig lastfreien Motor an (oder einen idealen Motor mit $R = 0$), dann erhalten wir aus Gl. (6.4a) $U_B/k\omega = DC^*/DC$. Aus Gl. (6.4b) folgt dann $DC^* = DC$ und $U_B = k\omega$, d.h., die OFF Phase ist vollständig stromfrei und der Motor läuft mit voller Drehzahl, der "lastfreien" Drehzahl $\omega_f \equiv U_B/k$. Diese Drehzahl wird, im Unterschied zum Gleichstrombetrieb, auch bei sehr kleinem Taktverhältnis DC erreicht.

Bei einer kleinen zusätzlichen Last vergrößert sich DC^* leicht gegenüber DC , dies geht nach Gl. (6.5) allerdings nur, wenn auch $k\omega$ kleiner als U_B wird, d.h. die Stromlücke verkleinert sich auf Kosten der Drehzahl. Die Gln. (6.4) können für kleine Werte von $DC^* - DC$ (was kleine Ströme \bar{I} impliziert) ausgewertet werden, mit dem Ergebnis

$$DC^* - DC = \chi_{DC^*} \frac{R\bar{I}}{U_B}, \quad \frac{1}{\chi_{DC^*}} = \frac{T}{\tau} DC \frac{e^{\frac{T}{\tau} DC} - 1}{e^{\frac{T}{\tau} DC} - 1} - 1 \approx \begin{cases} \frac{T}{\tau} DC + e^{-\frac{T}{\tau} DC} - 1 & \forall \frac{\tau}{T} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{2} \frac{T}{\tau} DC & \forall \frac{\tau}{T} \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (6.6)$$

Es wird nochmals betont, dass Gl. (6.6), und Gl. (6.7), nur für kleine Werte von $DC^* - DC$ gilt; spätestens beim Erreichen der obere Grenze in Gl. (6.5) verlieren sie jeden Sinn. Mit zunehmenden Strom \bar{I} wird also DC^* etwas größer als DC , d.h. die Stromlücke schließt sich umso mehr je größer die Last ist. Die "DC*-Suszeptibilität" χ_{DC^*} beschreibt wie empfindlich der Motor auf eine Last durch Erhöhung von DC^* reagiert. Interessanterweise ist χ_{DC^*} bei kleinen Taktverhältnissen sehr groß, d.h. dass sich die Stromlücke bei einer anfallenden Last sehr schnell schließt. Für die Drehzahl ergibt sich

$$\frac{k\omega}{U_B} = 1 - \chi_{\omega} \frac{R\bar{I}}{U_B}, \quad \chi_{\omega} = \frac{T}{\tau} \frac{e^{\frac{T}{\tau} DC} - 1}{e^{\frac{T}{\tau} DC} - 1} \approx \begin{cases} \frac{T}{\tau} & \forall \frac{\tau}{T} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{DC} & \forall \frac{\tau}{T} \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (6.7)$$

Wie erwartet erniedrigt sich die Drehzahl mit zunehmender Last, wobei die " ω -Suszeptibilität" χ_{ω} angibt wie empfindlich der Motor auf die Last mit einer Drehzahl-Erniedrigung reagiert. Interessant ist, dass χ_{ω} bei kleinen Taktverhältnissen sehr groß ist, d.h. die Drehzahl bricht bereits bei der kleinsten Belastung ein. Dies ist auch zu erwarten, da bei kleinen Taktverhältnissen dem Motor wenig Leistung zur Verfügung steht. Dieses Verhalten kann aber auch anders interpretiert werden: Entsprechend Gl. (6.2b) ist die "Steifigkeit" (im Sprachgebrauch von [2]) bei kleinem Taktverhältnis DC und kleinem Unterschied $DC^* - DC$ sehr klein.

Das schnelle Einbrechen der Drehzahl mit zunehmender Last wird schwächer je näher man der Grenzdrehzahl ω_g kommt (siehe Ende Kapitel 4). Die Stromlücke schließt sich zunehmend, DC^* wird größer, und der Motor wird steifer. Bei Erreichen oder Unterschreiten der Grenzdrehzahl ω_g

wird $DC^* = 1$ und der Motor maximal steif, die Stromlücke hat sich vollständig geschlossen, und der Motor verhält sich wie im Gleichspannungsfall.

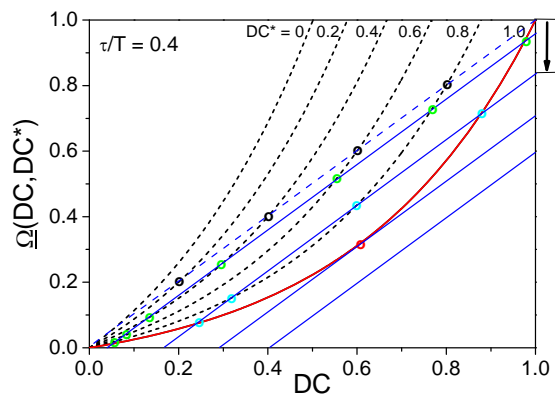
Für den allgemeinen Fall lässt sich das Motorverhalten über eine graphische Lösung bestimmen. Die Motor- und Bestimmungsgleichungen (6.4) lassen sich, in normierter Schreibweise, umschreiben in

$$\underline{\Omega}(DC) = DC - \underline{I}, \quad \text{Gl. (6.8a)}$$

$$\underline{\Omega}(DC, DC^*, \tau/T) = \frac{e^{\frac{\tau}{DC}} - 1}{\frac{\tau}{DC^*} - 1} DC^*, \quad \text{Gl. (6.8b)}$$

wobei die Funktion $\underline{\Omega}(DC, DC^*, \tau/T)$ eingeführt wurde. Zwei Eigenschaften sind erwähnenswert: (i) Es gilt $\underline{\Omega} = \underline{\omega}DC^*$; für den Fall ohne Stromlücke entspricht $\underline{\Omega}$ damit genau der Drehzahl $\underline{\omega}$. (ii) Für $DC^* = 1$ entspricht $\underline{\Omega}$ der Grenzfrequenz $\underline{\omega}_g$ aus Kapitel 4, Gl. (4.7), also $\underline{\Omega}(DC, 1) \hat{=} \underline{\omega}_g(DC)$.

Gleichung (6.8a) lässt sich graphisch lösen indem die rechte und linke Seite der Gleichung als Funktion von DC dargestellt und die Schnittpunkte gesucht werden. Die Funktion $\underline{\Omega}(DC, DC^*)$ wird hierbei als Kurvenschar für den Parameter DC^* betrachtet. Die Kurven sind, für das Beispiel $\tau/T = 0.4$, für einige Werte von DC^* im Bild unten dargestellt (schwarz-gestrichelte und rote Linien). Die rechte Seite entspricht einer Geraden mit Steigung Eins, welche um den Strom \underline{I} nach unten verschoben ist, einige Beispielkurven sind im Bild eingezeichnet (blaue Linien). Die Lösungen von Gl. (6.8a) ergeben sich nun aus den Schnittpunkten der dem Strom \underline{I} zugeordneten "blauen" Linie mit den "schwarz-gestrichelten" Linien, wie im Bild durch die Kreise angedeutet.

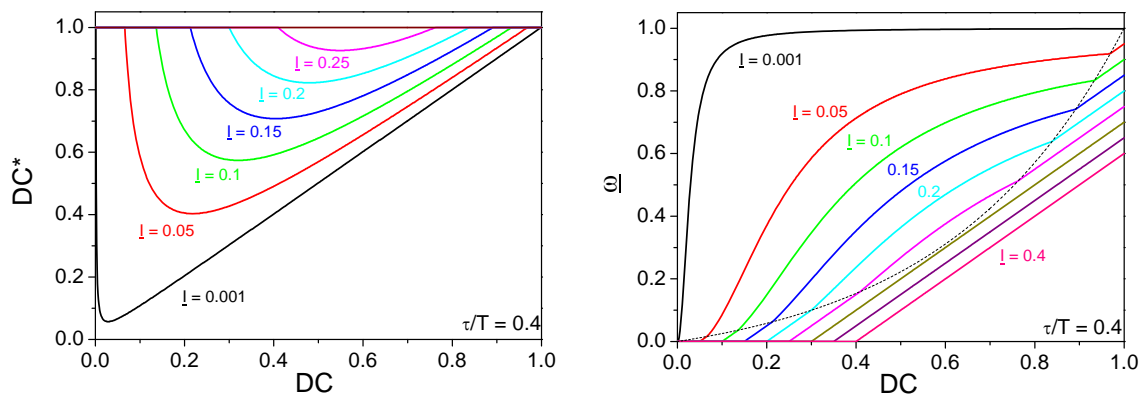


Für den Fall das kein Strom fließt, $\underline{I} = 0$, finden sich die Schnittpunkte bei $DC = DC^*$, d.h. die Stromlücke ist maximal ausgeprägt, wie nach Gl. (6.6) auch zu erwarten war. Bei gegebenem Taktverhältnis DC wird mit zunehmendem Strom die Stromlücke immer kleiner. Dies ist für das im Bild gezeigte Beispiel vielleicht am einfachsten bei $DC = 0.6$ zu sehen. Der Schnittpunkt für den angedeuteten Strom liegt nun nicht auf der $DC^* = 0.6$ Kurve von $\underline{\Omega}$, wie es bei Strom Null war, sondern auf der $DC^* = 0.8$ Kurve, d.h. die Stromlücke hat sich zur Hälfte geschlossen. Erhöht man den Strom weiter, ergibt sich irgendwann die Situation bei der der Schnittpunkt auf der $DC^* = 1$ Kurve liegt, und sich die Stromlücke somit vollständig geschlossen hat. Wird der Strom weiter erhöht, ergibt sich kein Schnittpunkt mehr, und damit auch keine Stromlücke.

Motorverhalten als Funktion des Taktverhältnis DC

Mit den eben geschilderten Überlegungen ergibt sich ein qualitatives Bild vom Verhalten des Motors: bei kleinen Taktverhältnissen ergibt sich zunächst wegen $DC^* \approx DC$ eine ausgeprägte Stromlücke, der Motor ist sehr elastisch und die ω -Suszeptibilität groß. Das heißt, die Drehzahl bricht auch bei kleiner Last stark ein. Mit einbrechender Drehzahl ω wird der Motor jedoch steifer und die Stromlücke schließt sich, bis beim Erreichen der Grenzdrehzahl ω_g der Fall ohne Stromlücke eintritt. Bei mittleren Taktverhältnissen ist das Verhalten im Prinzip ähnlich, nur dass der Motor wegen dem größeren DC und damit größeren DC^* von vorneherein steifer ist, und weniger empfindlich auf eine Last reagiert. Die Grenzfrequenz ist jedoch nach wie vor klein, so dass sich im Regelfall eine Stromlücke ergibt. Bei großen Taktverhältnissen wird die Grenzfrequenz nahezu maximal bzw. der Motor steif; und da DC groß ist schließt sich eine eventuell bei kleiner Last vorhandene Stromlücke schnell unter Last. In diesem Bereich wird typischerweise wieder der Fall ohne Stromlücke vorliegen.

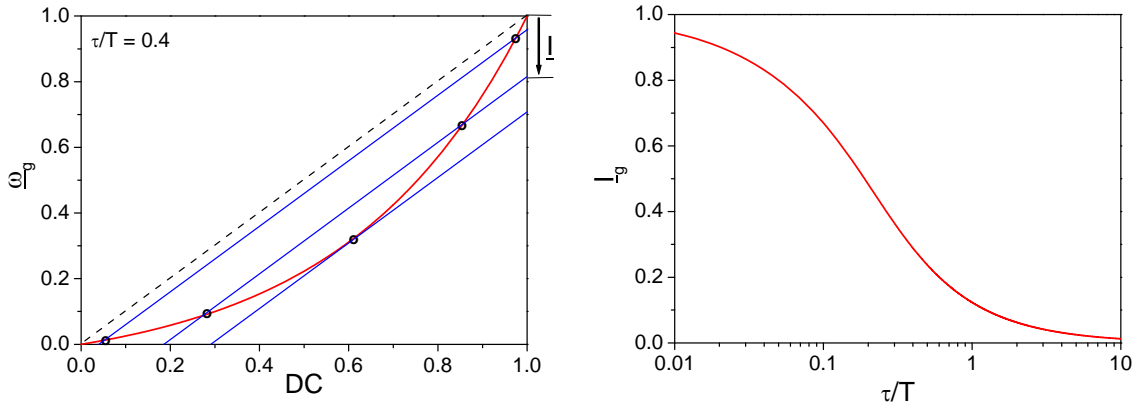
Dieses Verhalten ist in den nächsten beiden Bildern anhand des Beispiels eines Motors mit $\tau/T = 0.4$ illustriert. Links ist DC^* und rechts die normierte Drehzahl $\underline{\omega}$ als Funktion von DC für verschiedene Werte des normierten Stroms \underline{I} dargestellt (rechts ist gestrichelt noch zusätzlich der Verlauf der Grenzkurve $\underline{\omega}_g(DC)$ eingezeichnet). Es ist gut zu erkennen, dass sich der Motor bei einer mittleren Last bei kleinen und großen Taktverhältnissen DC im Zustand ohne Stromlücke ($DC^* = 1$) befindet, während es bei mittleren Taktverhältnissen einen Bereich gibt, in dem eine Stromlücke ($DC^* < 1$) vorkommt.



Das Auftreten dieses Zwischenbereichs und seine Grenzen sind gut mit der graphischen Lösungsmethode einzusehen. Die Werte von DC an den Grenzen des Übergangsbereichs sind gegeben durch die Gln. (6.4) für $DC^* = 1$, und Gl. (6.4b) entspricht der Grenzkurve $\underline{\omega}_g(DC)$, Gl. (4.7). Die Grenzen des Übergangsbereichs entsprechen daher, in normierter Schreibweise, den Lösungen von

$$\underline{\omega}_g(DC) = DC - \underline{I}, \tag{6.9}$$

welche wie oben graphisch ermittelt werden können, wenn beide Seiten der Gleichung als Funktion von DC darstellt werden. Die Lösungen ergeben sich wieder aus den Schnittpunkten, wie im Bild unten links angedeutet.



Diese Konstruktion zeigt einsichtig, dass sich bei kleiner Last ein großer Zwischenbereich ergibt, welcher mit zunehmender Last kleiner wird, und bei Überschreiten eines Grenzstromes I_g ganz verschwindet. Die Situation für andere Werte von τ/T kann genauso erschlossen werden, es ist nur die entsprechende Grenzkurve zu verwenden. Grenzkurven für einige Beispiele wurden am Ende von Kapitel 4 gezeigt. Es ergibt sich ganz allgemein:

Mit zunehmender Last (Strom) wird der Zwischenbereich, in dem eine Stromlücke auftritt, immer kleiner und verschwindet letztendlich. Der Punkt an dem der Zwischenbereich verschwindet wird für größere Werte von τ/T (größere Induktivität) bereits bei kleineren Lasten (Strömen) erreicht.

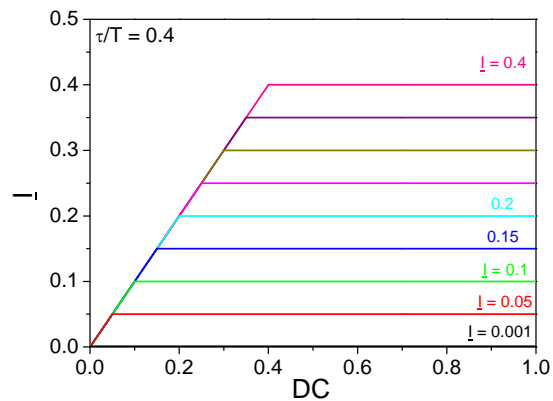
Die graphische Konstruktion lässt auch erkennen, dass sich beim Grenzstrom I_g nur ein Schnittpunkt ergibt, an dem die Steigung der Grenzkurve zudem Eins ist. Daraus lässt sich die nachstehende Gl. (6.10) für $I_g(\tau/T)$ ableiten, dessen Verlauf oben rechts dargestellt ist.

$$I_g(\tau/T) = \frac{\tau}{T} \left\{ \ln \left[\frac{\tau}{T} \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \right] - 1 \right\} + \frac{1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} \quad (6.10)$$

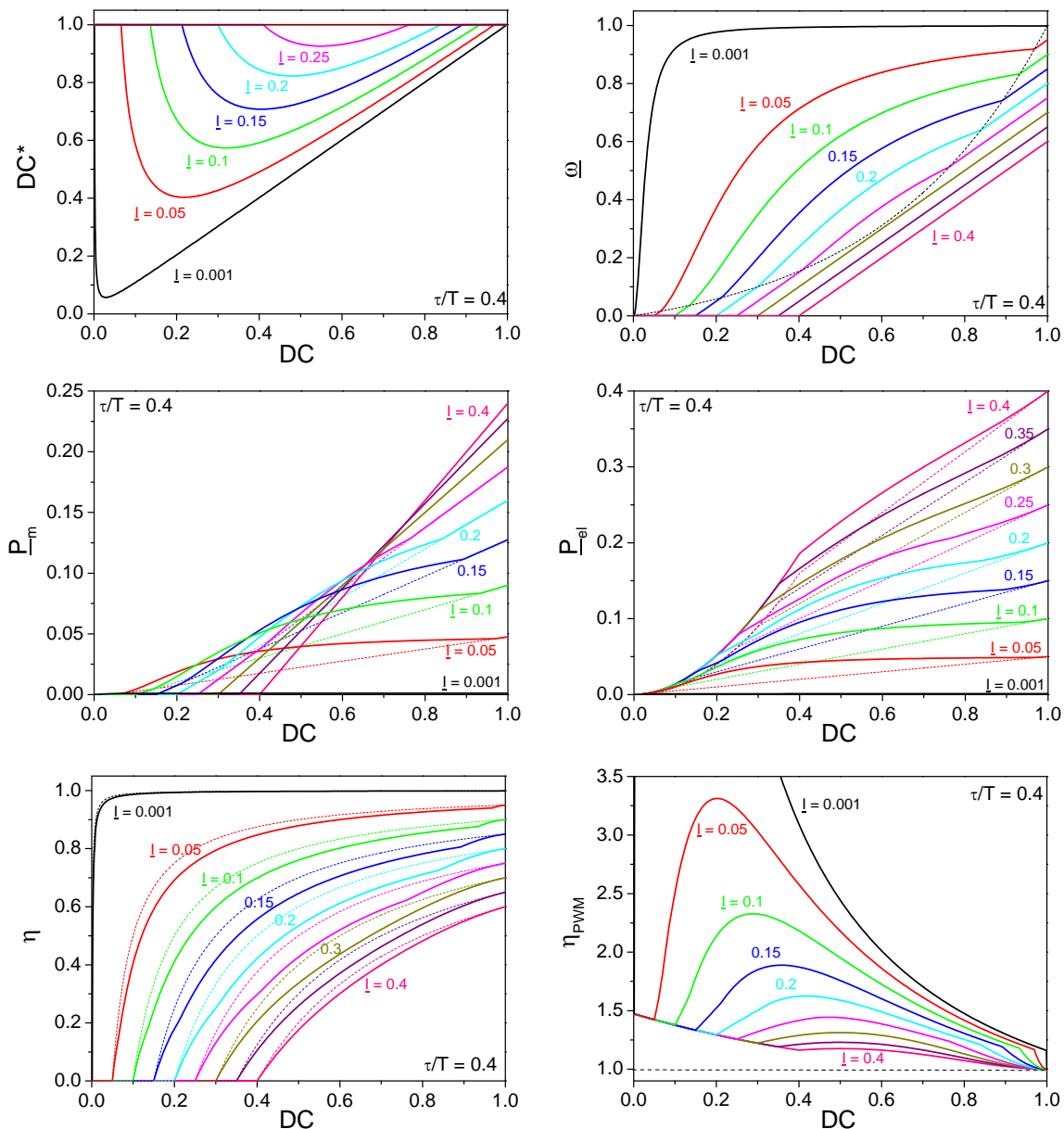
Damit ist das Verhalten von DC^* und ω als Funktion von DC für gegebenes \bar{I} bekannt. Alle weiteren Größen lassen sich nun mittels der in Kapitel 4 und 5 angegebenen Formeln bestimmen.

Für das Beispiel $\tau/T = 0.4$ sind die resultierenden Kurven in den folgenden Bildern dargestellt, wobei daran erinnert wird, dass ein halb-idealer Motor ($M_V = 0$) angenommen wurde, also $\underline{M} = \underline{I}$ gilt. Der für jede Kurve angegebene Strom \underline{I} kann, oder sollte, als das anliegende Lastdrehmoment betrachtet werden.

Bezüglich des tatsächlich fließenden Stroms bzw. vom Motor gelieferten Drehmoments ist jedoch zu berücksichtigen, dass für kleine Taktverhältnisse DC der Motor das gewünschte Drehmoment nicht liefern kann und blockiert, d.h. die Drehzahl null ist. Dies ist im nebenstehenden Diagramm dargestellt. Wie zu erkennen, ist der tatsächlich fließende Strom für $DC < \underline{I}$ kleiner als der gewünschte Wert. Dieser Effekt hat natürlich nichts mit dem PWM Betrieb zu tun; er tritt im Gleichstrombetrieb genauso auf.



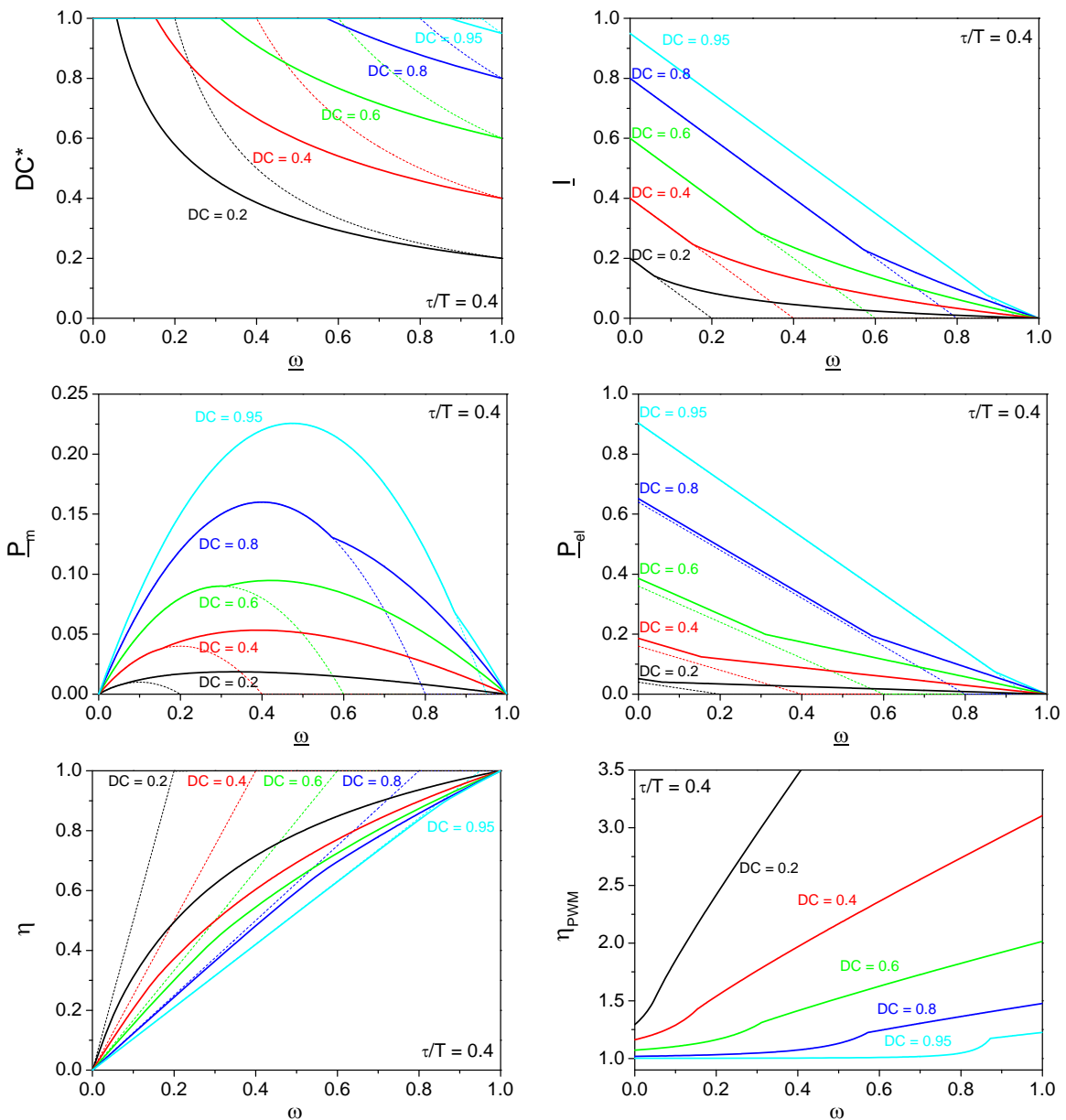
In den folgenden Bildern sind die mechanische und elektrische Leistung \underline{P}_m und \underline{P}_{el} , sowie die sich ergebenden Wirkungsgrade η und η_{PWM} gezeigt. Zum Vergleich sind auch die Kurven für den Idealfall $\tau/T \rightarrow \infty$ entsprechend einer unendlich großen Induktivität gestrichelt mit eingezeichnet. Um alle relevanten Bilder an einer Stelle zusammen zu haben, sind auch die auf Seite 18 bereits gezeigten Bilder für DC^* und $\underline{\omega}$ nochmals dargestellt.



In dem Betriebsbereich, in dem eine Stromlücke auftritt, liefert der Motor für einen gegebenen Strom eine größere mechanische Leistung als im Gleichstrombetrieb. Dies liegt im Wesentlichen an der in diesem Bereich gegenüber dem Gleichstrombetrieb erhöhten Drehzahl. Diese Mehrleistung mag als vorteilhaft erscheinen, allerdings erhöht sich im Gegenzug auch die benötigte elektrische Leistung, und zwar gerade der Art, dass sich der Wirkungsgrad insgesamt verschlechtert, in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Ergebnis aus Kapitel 3. Weiterhin wird der Motor in diesem Bereich elastischer, so dass sich die Drehzahl bei einer Laständerung vergleichsweise stark verändert. Insgesamt stellt sich dieser Betriebsbereich also als weniger vorteilhaft dar.

Motorverhalten als Funktion der Drehzahl ω

Als nächstes wird das Motorverhalten als Funktion der Drehzahl ω für gegebene Taktverhältnisse DC für den Beispielmotor mit $\tau/T = 0.4$ betrachtet. In diesem Fall lassen sich alle Größen ohne Umschweife problemlos berechnen, da DC^* direkt aus der Bestimmungsgleichung (6.4b) bzw. (4.5) folgt. Der Verlauf von DC^* als Funktion von ω wurde bereits in Kapitel 4 gezeigt, ist aber unten nochmals dargestellt. Die weiteren Bilder zeigen die Verläufe für den Strom I , die mechanische und elektrische Leistung P_m und P_{el} , sowie den Wirkungsgraden η und η_{PWM} . Zum Vergleich sind wieder die Kurven für den Idealfall $\tau/T \rightarrow \infty$ gestrichelt mit eingezeichnet.



Es ist deutlich zu entnehmen wie sich das Verhalten des Motors durch das Auftreten einer Stromlücke für Drehzahlen größer als die Grenzdrehzahl $\omega_g(DC)$ verändert. Der Motor wird in diesem Bereich, dem Bereich *mit* Stromlücke, mit zunehmender Drehzahl ω immer elastischer. Einerseits werden so bei kleinen Lasten trotz eines kleinen Taktverhältnisses hohe Drehzahlen

erreicht. Andererseits bedeutet dies auch, dass die Drehzahl bereits durch eine kleine Last stark einbricht. In diesem Bereich kann die Drehzahl des Motors also nicht gut über das Taktverhältnis gesteuert werden.

Der Verlauf der I vs ω Kurve in der Nähe von $\omega \approx 1$ ist linear und durch Gl. (6.7) gegeben. Die Steigung ist demnach durch die inverse ω -Suszeptibilität bestimmt. Das Verhalten im Bereich *mit* Stromlücke könnte also durch eine Gerade mit Steigung $-1/\chi_\omega$ angenähert werden. Erstaunlicherweise funktioniert dies sehr gut für sowohl große und kleine Wert von τ/T , $\tau/T < 0.05$ und $\tau/T \geq 1$. Für Werte dazwischen, wie z.B. den gezeigten Fall $\tau/T = 0.4$, funktioniert diese Näherung für nicht zu kleine Taktverhältnisse. In dem Bereich *mit* Stromlücke ist die vom Motor abgegebene mechanische Leistung gegenüber dem Gleichstrombetrieb größer, allerdings auch die notwendige elektrische Leistung, und zwar wieder genau so, dass insgesamt ein schlechterer Wirkungsgrad resultiert.

Die präsentierten Diagramme und angestellten Überlegungen zeigen:

Es ist vorteilhaft, den Motor bei großen Taktverhältnissen und unter relativ großer Last zu betreiben. Dadurch wird der Bereich mit Stromlücke vermieden, und die damit einhergehenden Nachteile, wie eine schlechte Steuerbarkeit des Motors über das Taktverhältnis oder ein verschlechterter Wirkungsgrad.

7. Näherungslösungen für das Motorverhalten als Funktion des Taktverhältnis

Es soll nochmals das Motorverhalten als Funktion von DC wie im vorhergehenden Kapitel diskutiert aufgegriffen werden. Für die diesbezüglich gezeigten Bilder wurde das Gleichungssystem (6.4) numerisch, d.h. mit einem kleinen, geeigneten Computerprogramm gelöst um die Größen DC^* und ω zu erhalten. Dies ist allerdings etwas unpraktisch, und nicht unbedingt für jedermann durchzuführen. Es wäre daher wünschenswert einen Lösungsweg zu finden, der ohne den Umweg einer Selbstkonsistenzbestimmung die Berechnung des Verlaufs von DC^* und ω , und damit aller anderen Größen, ermöglicht. Wie bereits erwähnt ist dies analytisch nur mit geeigneten Näherungen möglich. Als eine Möglichkeit bietet es sich an eine Näherungsformel für die Bestimmungsgleichung (6.4b) zu suchen, welche z.B. die Kriterien erfüllt, dass sie

- (i) eine analytische Auflösung der Motorgleichung (6.4b) erlaubt,
- (ii) das Verhalten in allen Bereich zumindest qualitativ richtig beschreibt, und
- (iii) für gewisse Grenzfälle exakte Resultate liefert.

Intensive Bemühungen in diese Richtung mittels verschiedener Reihenentwicklungen scheiterten; erst der Schritt zur Padé- bzw. rationalen Approximation führte zu einem Ergebnis. Tatsächlich lassen sich so eine Fülle von möglichen Lösungswegen erhalten, je nach "erlaubter" Komplexität und Gewichtung der verschiedenen Aspekte. Die von mir getesteten Lösungen werden für $\tau/T \rightarrow \infty$ exakt, und liefern für $\tau/T \geq 1$ gute Werte für DC^* . Im Prinzip werden diese Lösungen mit kleiner werdendem τ/T auch schnell schlechter, trotzdem können einige dieser Lösungen das Motorverhalten, also das Resultat der selbstkonsistenten Lösung von Gl. (6.4), für *alle* Werte von τ/T verblüffend genau beschreiben. Dies liegt daran, dass im Betrieb nicht der gesamte Wertebereich von DC^* und ω abgefahren wird, so dass es nur auf eine gute Näherung in den tatsächlich relevanten Bereichen ankommt.

Im Folgenden werden zwei Lösungen vorgestellt. Der erste Vorschlag reproduziert das Motorverhalten im gesamten Wertebereich von τ/T mit guter Genauigkeit, allerdings sind die Formeln, obwohl von einfacher Gestalt, etwas länglich. Der zweite Vorschlag ergibt wesentlich einfachere Ausdrücke, welche *a priori* eine zwar qualitativ korrekte aber quantitativ schlechtere Beschreibung liefern, jedoch *a posteriori* so verbessert werden können, dass praktisch exakte Resultate erhalten werden. Diese Formeln ermöglichen es z.B. das Motorverhalten mit leicht verfügbaren Darstellungsprogrammen wie Excel zu studieren.

Näherung #1

Die Bestimmungsgleichung für DC^* wird hier durch den Ausdruck

$$DC^*(DC, \underline{\omega}) = \frac{DC}{\underline{\omega}} \left(\frac{a + b\underline{\omega}}{c - d\underline{\omega}} \right) \quad (7.1a)$$

genähert, wobei die Konstanten a , b , c und d nicht von der Drehzahl $\underline{\omega}$, wohl aber vom Taktverhältnis DC abhängen. Einsetzen von Gl. (7.1a) in die Motorgleichung (6.4a) und auflösen nach $\underline{\omega}$ liefert

$$\underline{\omega}(DC, \underline{I}) = \frac{(DC - \underline{I})c - DCa}{(DC - \underline{I})d + DCb}. \quad (7.1b)$$

Da nun DC^* und $\underline{\omega}$ bekannt sind, können alle anderen Größen wie der Strom \underline{I} usw. berechnet werden.

Für die Konstanten a , b , c und d gilt

$$a(DC) = [DC(1 - DC) - g(1 - \underline{\omega}_g)]\underline{\omega}_g, \quad (7.1c)$$

$$b(DC) = DC^2 - [DC(2 - \underline{\omega}_g) - g(1 - \underline{\omega}_g)]\underline{\omega}_g, \quad (7.1d)$$

$$c(DC) = DC[DC + (\underline{\omega}_g - 2DC)\underline{\omega}_g - g(1 - \underline{\omega}_g)], \quad (7.1e)$$

$$d(DC) = DC[(1 - DC)\underline{\omega}_g - g(1 - \underline{\omega}_g)], \quad (7.1f)$$

wobei $\underline{\omega}_g$ die Grenzdrehzahl aus Gl. (4.7) und die Konstante g die inverse ω -Suszeptibilität aus Gl. (6.7) ist,

$$g(DC) = \frac{\tau}{T} \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau} DC} \right) = \frac{1}{\chi_\omega}. \quad (7.2)$$

Für Werte von $\tau/T < 1$ wird die Bestimmungsgleichung zunehmend schlechter approximiert, das Motorverhalten wird allerdings für alle Werte von τ/T sehr gut beschrieben.

Näherung #2

Die Bestimmungsgleichung für DC^* wird hier durch den Ausdruck

$$DC^*(DC, \underline{\omega}) = DC \frac{DC}{DC - g(1 - \underline{\omega})} \quad (7.3a)$$

genähert, mit der Konstanten $g(\text{DC})$ aus Gl. (7.2). Einsetzen in die Motorgleichung und auflösen nach $\underline{\omega}$ liefert die vergleichsweise einfache Beziehung

$$\underline{\omega}(\text{DC}, \underline{I}) = \frac{(\text{DC} - g)(\text{DC} - \underline{I})}{\text{DC}^2 - g(\text{DC} - \underline{I})} = \left(1 + \frac{\text{DC}\underline{I}}{(\text{DC} - g)(\text{DC} - \underline{I})} \right)^{-1}. \quad (7.3b)$$

Damit können nun wieder alle anderen Größen berechnet werden, allerdings ergeben sich nur für $\tau/T \geq 1$ gute Resultate. Eine erhebliche Verbesserung lässt sich aber dadurch erreichen, dass der in Gl. (7.3b) einzusetzende Wert für das Taktverhältnis DC um einen Beitrag proportional zum Strom \underline{I} korrigiert wird, also anstatt DC der Wert $\text{DC} - \kappa\underline{I}$ eingesetzt wird (man bedenke dabei das auch g von DC abhängt). Die Konstante κ hängt nur vom Parameter τ/T ab, und ist gegeben durch

$$\kappa(\tau/T) = \frac{1}{6 \left[1 + \left(4 \frac{\tau}{T} \right)^{\frac{4}{3}} \right]}. \quad (7.4)$$

Auf diese Weise erhält man die Näherungslösung

$$\underline{\omega}(\text{DC}, \underline{I}) = \underline{\omega}_{7.3b}(\text{DC} - \kappa\underline{I}, \underline{I}), \quad (7.5)$$

wobei $\underline{\omega}_{7.3b}$ die Funktion aus Gl. (7.3b) bezeichnet. Diese Formel liefert für den Bereich mit Stromlücke verblüffend genaue Resultate für alle Werte von τ/T .

Appendix A: Zeitverlauf des Stroms für eine Reihenschaltung aus Widerstand und Spule

Um den zeitlichen Verlauf des Stroms bei der PWM Ansteuerung eines Elektromotors zu bestimmen, fand ich es nützlich zunächst nur das Verhalten der Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer Induktivität L bei einem PWM Betrieb zu betrachten. Für eine RL Reihenschaltung gilt

$$U_{RL}(t) = RI(t) + L \frac{d}{dt} I(t). \quad (\text{A.1})$$

oder umgestellt

$$\frac{d}{dt} I(t) = -\frac{I(t)}{\tau} + \frac{U_{RL}(t)}{L}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (\text{A.2b})$$

Diese Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ kann einfach mittels der Methode der Variation der Konstanten für beliebige Spannungsverläufe $U_{RL}(t)$ gelöst werden. Die allgemeine Lösung ist

$$I(t) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \left(\int_{t_0}^t \frac{U_{RL}(t')}{L} e^{\frac{t'-t_0}{\tau}} dt' + I(t_0) \right), \quad (\text{A.3})$$

wobei t_0 die Anfangszeit und $I(t_0)$ der Strom zur Anfangszeit t_0 ist. Als Anfangszeit wird im Folgenden $t_0 = 0$ gewählt, und es wird an $I_0 \equiv I(0)$ erinnert.

Weitergehendere, im Web verfügbare Literatur zur Methode der Variation der Konstanten:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Variation_der_Konstanten

- <http://www.mp.haw-hamburg.de/pers/Vassilevskaya/download/mathe-2/differentialgleichungen/6a-inhomog.pdf>

A.1. Stromverlauf bei einem Ein- oder Ausschaltvorgang

Der Stromverlauf bei einem Ein- oder Umschaltvorgang ergibt sich aus der vorgegebenen Spannung U_{RL} vor und nach dem Schaltvorgang, und ist bei Kenntnis von I_0 leicht aus Gl. (A.3) zu berechnen. Wegen der Stetigkeit von $I(t)$, wie in Kapitel 3 in Bemerkung (4) erläutert, lässt sich I_0 aus der Situation vor dem Schaltvorgang bestimmen. Es ergibt sich ein exponentielles Abklingen hin zum stationären Wert, mit einer Zeitkonstanten $\tau = L/R$.

Der Stromverlauf bei einem Ausschaltvorgang erfordert etwas mehr Überlegung, ist doch der Strom auf den ersten Blick nicht stetig, und die Spannung U_{RL} nach dem Unterbrechen des Stromkreises nicht ohne weiteres bekannt (und somit Gl. (A.3) nicht direkt anwendbar). Entsprechend Gl. (A.1) ergäbe sich für eine unendlich kurze Zeit eine unendlich hohe Spannung, was auch eine unendlich hohe Leistung bedeuten würde. In der Realität liegt jedoch über den Anschlüssen der Spule ein endlicher, wenn auch sehr großer Widerstand R_D , und es ist der Stromkreis über R , L , und R_D zu betrachten. Wegen der Stetigkeit des Stroms durch die Spule

fließt nach dem Ausschalten der gleiche Strom I_0 wie vor dem Schaltvorgang, und dementsprechend wird die Spannung $U_{RL}(0) \approx -R_D I_0$ auftreten. Nach dem Schaltvorgang klingt der Strom exponentiell ab, nun allerdings mit der Zeitkonstanten $\tau_D = L/(R+R_D) \approx L/R_D$ so dass sich der stationäre Zustand in sehr kurzer Zeit einstellt. Im stationären Zustand ist der Strom Null, wie wir es bei einem geöffneten Schalter erwarten. Da diese Vorgänge sehr schnell sind, kann es Sinn machen sie zu ignorieren und nur die Situation kurz vor und "lange" nach dem Ausschalten zu betrachten (lange im Vergleich zu τ_D). Der Strom scheint dann unstetig von I_0 auf Null zu springen, gleichzeitig springt jedoch auch die Spannung U_{RL} auf Null.

Weitergehendere, im Web verfügbare Literatur zu Schaltvorgängen beim RL Glied:

- http://reinke.ws/teaching/fs09/exc_4.pdf

A.2. Stromverlauf bei einer angelegten PWM Spannung

An das RL Glied wird nun eine PWM Spannung angelegt, welche in der ON Phase den Wert U_0 und in der OFF Phase den Wert U_1 annehmen soll. Für die Periode von $t = 0$ bis $t = T$ gilt also:

$$U_{RL}(t) = \begin{cases} U_0 & \forall 0 \leq t \leq DT \\ U_1 & \forall DT \leq t \leq T \end{cases}$$

Für den stationären Zustand ist, wie schon erwähnt, auch der Stromverlauf periodisch mit der Periode T , d.h., es gilt insbesondere Gl. (A.4). Von Interesse ist auch der Strom I_{DT} zur Zeit $t = DT$. Wir führen noch den Stromhub $\Delta I = I_{DT} - I_0$ und den Spannungshub $\Delta U_{RL} = U_0 - U_1$ ein.

Der Stromverlauf während einer Periode zerfällt wie die Spannung in zwei Stücke entsprechend den beiden Phasen I und II, und ergibt sich nach Gl. (A.3) zu

$$\text{I:} \quad I(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{U_0}{R} \left(e^{\frac{t}{\tau}} - 1 \right) + I_0 \right] = \frac{U_0}{R} + \left(I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\text{II:} \quad I(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\frac{U_0}{R} \left(e^{\frac{DT}{\tau}} - 1 \right) + \frac{U_1}{R} \left(e^{\frac{t}{\tau}} - e^{\frac{DT}{\tau}} \right) + I_0 \right] = \frac{U_1}{R} + \left(\frac{U_0 - U_1}{R} e^{\frac{DT}{\tau}} + I_0 - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{A.4b})$$

Der Strom $I(T)$ am Ende einer Periode ergibt sich aus Gl. (A.4b), und zusammen mit $I(T) = I_0$ kann der Wert von I_0 selbstkonsistent bestimmt werden. Weiterhin soll der mittlere Strom sowie die mittlere elektrische Leistung berechnet werden.

Diese Rechnungen werden übersichtlicher wenn wir uns auf die Struktur der Gl. (A.4) konzentrieren, und schreiben

$$\text{I:} \quad I(t) = A + (I_0 - A) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{II:} \quad I(t) = B + (I_0 + C) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.5b})$$

mit Konstanten A, B, und C, die durch Vergleich mit Gl. (A.4) direkt abgelesen werden können. Der Strom I(T) nach einer Periode ist nach Gl. (A.5b) gegeben durch

$$I(T) = B + (I_0 + C)e^{-\frac{T}{\tau}},$$

und durch gleichsetzen mit I_0 , und auflösen nach I_0 ergibt sich

$$I_0 = \frac{B + Ce^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}. \quad (\text{A.6})$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich wenn diese Gleichung nach der Konstanten C aufgelöst und das Resultat in Gl. (A.5b) eingesetzt wird. Auf diese Weise erhält man die „symmetrischen“ Gleichungen

$$\text{I:} \quad I(t) = A + (I_0 - A)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.7a})$$

$$\text{II:} \quad I(t) = B + (I_0 - B)e^{\frac{T}{\tau}} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{A.7b})$$

Damit ist der Stromverlauf vollständig bestimmt; er ergibt sich aus Gl. (A.5) oder (A.7) zusammen mit Gl. (A.6).

Als nächstes soll der mittlere Strom bestimmt werden. Auch hier ist es wieder nützlich sich auf die Struktur des Problems zu konzentrieren; wir benutzen Gl. (A.7). Für die Integrale in den Bereichen I und II findet man sofort

$$\text{I:} \quad \int_0^{DT} I(t) dt = A \cdot DT - \tau(I_0 - A) \left(e^{-\frac{DT}{\tau}} - 1 \right), \quad (\text{A.8a})$$

$$\text{II:} \quad \int_{DT}^T I(t) dt = B(T - DT) - \tau(I_0 - B) e^{\frac{T}{\tau}} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{DT}{\tau}} \right), \quad (\text{A.8b})$$

wobei sich die jeweils zweiten Terme wegen

$$(I_0 - A) \left(e^{-\frac{DT}{\tau}} - 1 \right) = A + (I_0 - A) e^{-\frac{DT}{\tau}} - I_0 \stackrel{\text{Gl.(A.7a)}}{=} I_{DT} - I_0, \quad (\text{A.9a})$$

$$(I_0 - B) e^{\frac{T}{\tau}} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{DT}{\tau}} \right) = -B - (I_0 - B) e^{\frac{T}{\tau}} e^{-\frac{DT}{\tau}} + I_0 \stackrel{\text{Gl.(A.7b)}}{=} -I_{DT} + I_0. \quad (\text{A.9b})$$

weiter vereinfachen lassen. Es ist nun erkenntlich, dass sich diese Terme in der Summe von Gl. (A.9a) und (A.9b) genau herausheben, und für den mittlere Strom gilt

$$\bar{I} = A \frac{DT}{T} + B \frac{T - DT}{T} = A \cdot DC + B(1 - DC). \quad (\text{A.10})$$

Damit ist auch die Berechnung des Mittelwerts des Stroms durchgeführt.

Die Ergebnisse sollen der Übersichtlichkeit halber, mit rücksubstituierten Konstanten $A = U_0/R$ und $B = U_1/R$ und in etwas anderer Form geschrieben, nochmals zusammengefasst werden:

$$\text{I: } I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0 - U_1}{R} \left(\frac{1 - e^{-\frac{T-DT}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_0}{R} - \frac{\Delta I}{1 - e^{-\frac{DT}{\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.11a})$$

$$\text{II: } I(t) = \frac{U_1}{R} - \frac{U_0 - U_1}{R} \left(\frac{1 - e^{-\frac{DT}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U_1}{R} + \frac{\Delta I}{e^{-\frac{DT}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (\text{A.11b})$$

$$I_0 = \frac{\frac{U_1}{R} + \left(\frac{U_0 - U_1}{R} e^{-\frac{DT}{\tau}} - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}, \quad (\text{A.12})$$

$$\Delta I = \frac{\Delta U_{RL}}{R} \frac{\left(1 - e^{-\frac{DT}{\tau}} \right) \left(1 - e^{-\frac{T-DT}{\tau}} \right)}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{\Delta U_{RL}}{R} \frac{2 \sinh\left(\frac{T}{2\tau} DC\right) \sinh\left(\frac{T}{2\tau} (1 - DC)\right)}{\sinh\left(\frac{T}{2\tau}\right)}, \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{I} = \frac{U_0}{R} DC + \frac{U_1}{R} (1 - DC) = \frac{\overline{U_{RL}}}{R}, \quad (\text{A.14})$$

wobei in Gl. (A.14) im zweiten Schritt die mittlere Spannung über das RL Glied eingeführt wurde, sowie auch das Resultat für den Stromhub ΔI angegeben wurde. Weitere, nützliche Ausdrücke für I_0 und I_{DT} ergeben sich auch durch einsetzen von $t = 0$ bzw. $t = T$ und $t = DT$ in Gl. (A.11).

Bemerkungen:

(1) Der Zeitverlauf des Stroms ist exponentiell und durch die Konstante $\tau = L/R$ charakterisiert, d.h., die Induktivität bestimmt wesentlich den Stromverlauf. Im Gegensatz dazu ist der mittlere Strom unabhängig vom Wert der Induktivität und durch eine Art Ohm'sches Gesetz mit der mittleren Spannung über das RL Glied verknüpft, siehe Gl. (A.14).

(2) Das Resultat für den mittleren Strom ist eine direkte Konsequenz aus der Stetigkeit des Stroms, der Periodizität des Stroms, und der Struktur des Problems wie in Gl. (A.5) formuliert. Diese Forderungen alleine bedingen das Ergebnis Gl. (A.14). Die Details des Problems, die sich in der spezifischen Form der Konstanten A, B, und C verbergen, sind für das Resultat unerheblich.

(3) Die obige Berechnung des mittleren Stroms ist ein konkretes Beispiel für das mit der Substitutionsregel erhaltene Ergebnis in Kapitel 3 das der induktive Term im Mittel Null ergibt. Tatsächlich, nach der Substitutionsregel gilt

$$\int_0^T \frac{d}{dt} I(t) dt = \int_0^{DT} \frac{d}{dt} I(t) dt + \int_{DT}^T \frac{d}{dt} I(t) dt = [I(DT) - I(0)] + [I(T) - I(DT)] = [I_{DT} - I_0] - [I_{DT} - I_0]$$

was dem in Gl. (A.9) gefundenen Ergebnis entspricht

A.3. Leistung bei einer angelegten PWM Spannung

Zuletzt soll die mittlere elektrische Leistung bestimmt werden, deren Berechnung ganz ähnlich zu der für den mittleren Strom erfolgt. Wir schreiben

$$\overline{P_{el}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{RL}(t) I(t) dt = \frac{U_0}{T} \int_0^{DT} I(t) dt + \frac{U_1}{T} \int_{DT}^T I(t) dt,$$

und mit Hilfe der Gln. (A.8), (A.9) und den Werten für die Konstanten A und B findet man

$$\overline{P_{el}} = \frac{U_0^2}{R} DC + \frac{U_1^2}{R} (1-DC) - \frac{\tau}{T} (U_0 - U_1) (I_{DT} - I_0) = \frac{\overline{U_{RL}^2}}{R} - \frac{\tau}{T} \Delta U_{RL} \Delta I, \quad (A.15)$$

wobei im zweiten Schritt der Mittelwert über das Quadrat der Spannung eingeführt sowie die Strom- und Spannungshübe benutzt wurden. Motiviert durch die Beziehung

$$\overline{U_{RL}^2} = \overline{U_{RL}}^2 + \Delta U_{RL}^2 DC(1-DC) \quad (A.16)$$

wird Gl. (A.15) geschrieben als

$$\overline{P_{el}} = \frac{\overline{U_{RL}}^2}{R} + \frac{\Delta U_{RL}^2}{R} DC(1-DC) K(DC, \tau/T), \quad (A.17a)$$

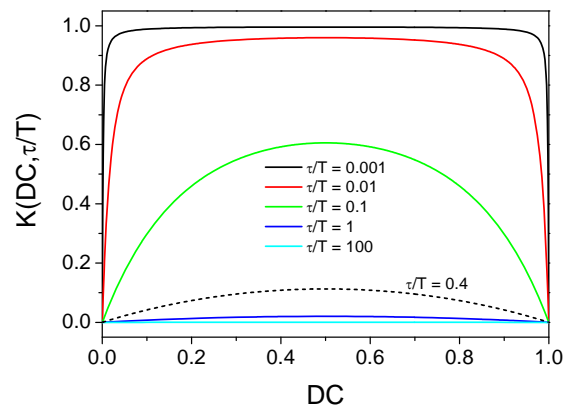
$$K(DC, \tau/T) \equiv 1 - \frac{\tau}{T} \frac{R \Delta I}{DC(1-DC) \Delta U_{RL}} = 1 - \frac{2\tau}{T} \frac{\sinh\left(\frac{T}{2\tau} DC\right) \sinh\left(\frac{T}{2\tau} (1-DC)\right)}{DC(1-DC) \sinh\left(\frac{T}{2\tau}\right)}, \quad (A.17b)$$

mit der bereits in Kapitel 5, Gl. (5.3b), eingeführten Funktion $K(DC, \tau/T)$. Für den Verlustfaktor in der allgemeinen Leistungsbilanz (3.6) erhält man damit

$$\eta_{PWM} = 1 + \frac{\Delta U_{RL}^2}{\overline{U_{RL}}^2} DC(1-DC) K(DC, \tau/T) \quad (A.18)$$

Der Verlauf von $K(DC, \tau/T)$ als Funktion des Tastverhältnis DC ist nebenstehend für einige Werte von τ/T dargestellt. Für kleine Werte von τ/T ist K außer für sehr kleine oder große Tastverhältnisse nahezu Eins; für große Werte von τ/T verläuft K parabelförmig mit DC , bzw. ist proportional zu $DC(1-DC)$. Für gegebenes τ/T nimmt K seinen Maximalwert bei $DC = 0.5$ an. Für den Maximalwert gilt

$$K(0.5, \tau/T) = 1 - \frac{4\tau}{T} \tanh\left(\frac{T}{4\tau}\right) \quad (A.19)$$



Bemerkungen:

(1) Aus der obigen Diskussion folgt, dass die mittlere Leistung die Werte

$$\frac{\overline{U_{RL}}^2}{R} \leq \overline{P_{el}} \leq \frac{\overline{U_{RL}}^2}{R} \quad (\text{A.20})$$

annehmen kann, je nach Wert von L , wobei die linke Seite für den Grenzfall $L \rightarrow \infty$ und die rechte Seite für $L \rightarrow 0$ erreicht wird. Der mittlere Strom und die mittlere Spannung hängen jedoch nicht von L ab. Bei gegebenem mittleren Strom und mittlerer Spannung ist also die benötigte Leistung für $L \rightarrow \infty$ minimal, während mit kleiner werdendem L die benötigte Leistung zunimmt bis zu einem Maximalwert. Dies ist Ausdruck der „Speicherwirkung“ der Spule: während der ON Phase wird Energie in der Spule gespeichert, welche in der OFF Phase wieder abgegeben wird. Gleichung (A.20) ist auch für den Wirkungsgrad relevant, und führt zu dem wohlbekanntem Wunsch nach hohen PWM Frequenzen bzw. großem Verhältnis τ/T .

(2) Gleichung (A.15) ergibt sich auch durch Integration des Stromquadrats. Mit Gl. (A.11) gilt

$$\int_0^{DT} I^2(t) dt = \frac{U_0^2}{R^2} DT + \tau \frac{U_0}{R} \frac{2\Delta I}{1 - e^{-\frac{DT}{\tau}}} \left(e^{-\frac{DT}{\tau}} - 1 \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\Delta I^2}{\left(1 - e^{-\frac{DT}{\tau}} \right)^2} \left(e^{-2\frac{DT}{\tau}} - 1 \right),$$

$$\int_{DT}^T I^2(t) dt = \frac{U_1^2}{R^2} (T - DT) - \tau \frac{U_1}{R} \frac{2\Delta I}{e^{-\frac{DT}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}}} \left(e^{-\frac{T}{\tau}} - e^{-\frac{DT}{\tau}} \right) - \frac{\tau}{2} \frac{\Delta I^2}{\left(e^{-\frac{DT}{\tau}} - e^{-\frac{T}{\tau}} \right)^2} \left(e^{-2\frac{T}{\tau}} - e^{-2\frac{DT}{\tau}} \right).$$

Die jeweils letzten Terme können mit Hilfe von $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ vereinfacht werden. In der Summe ergeben sie genau die Hälfte der Summe der jeweils zweiten Terme, so dass sich ergibt

$$\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt = \frac{U_0^2}{R^2} DC + \frac{U_1^2}{R^2} (1 - DC) - \frac{\tau}{T} \frac{U_0 - U_1}{R} \Delta I.$$

A.4. Diskussion der Ergebnisse bei angelegter PWM Spannung

Im Folgenden werden die zwei Grenzfälle $\tau/T \rightarrow 0$ und $\tau/T \rightarrow \infty$ entsprechend kleiner und großer Induktivität diskutiert. Für diese Fälle lässt sich das Verhalten durch einfaches Überlegen finden, was eine gute Kontrolle der Ergebnisse ermöglicht. Weiterhin wird der Übergangsbereich andiskutiert.

(1) $\tau/T \rightarrow 0$:

In diesem Grenzfall wird die Induktivität verschwindend klein. Dann können Exponential-Funktionen mit negativem Argument vernachlässigt werden, und man findet für den Stromverlauf

$$\text{I: } I(t) \approx U_0 / R, \quad \text{II: } I(t) \approx U_1 / R, \quad \Delta I \approx \Delta U_{RL} / R.$$

Der Strom folgt also der Spannung, wie zu erwarten, und dementsprechend ist der Ohm'sche Zusammenhang nach Gl. (A.14) zwischen Strom- und Spannungsmittelwert offensichtlich erfüllt. Die Funktion $K(DC, \tau/T)$ wird in diesem Grenzfall 1 und der Verlustfaktor η_{PWM} ist maximal. Für die mittlere Leistung ergibt sich das erwartete Ergebnis

$$\overline{P_{el}} = \frac{\overline{U_{RL}}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} DC + \frac{U_1^2}{R} (1 - DC).$$

(2) $\tau/T \rightarrow \infty$:

In diesem Grenzfall ist die Induktivität der Spule groß, und wir erwarten, dass der Strom einen sägezahnartigen Zeitverlauf annimmt, welcher letztendlich konstant wird. In diesem Bereich können die Exponentialfunktionen bzw. sinh entwickelt werden. Für den Strom und elektrische Leistung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \text{I:} \quad I(t) &= \frac{U_0}{R} - \frac{U_0 - U_1}{R} (1 - \text{DC}) \left(1 + \frac{DT}{2\tau} - \frac{t}{\tau} + O(\tau^{-2}) \right), \\
 \text{II:} \quad I(t) &= \frac{U_1}{R} + \frac{U_0 - U_1}{R} \text{DC} \left(1 + \frac{T + DT}{2\tau} - \frac{t}{\tau} + O(\tau^{-2}) \right), \\
 \Delta I &= \frac{\Delta U_{\text{RL}}}{R} \text{DC} (1 - \text{DC}) \frac{T}{\tau} + O(\tau^{-3}), \\
 \overline{P_{\text{el}}} &= \frac{\overline{U_{\text{RL}}^2}}{R} - \frac{\Delta U_{\text{RL}}^2}{R} \text{DC} (1 - \text{DC}) + O(\tau^{-2}) \stackrel{\text{Gl. (A.16)}}{=} \frac{\overline{U_{\text{RL}}^2}}{R} + O(\tau^{-2}). \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

Die Funktion $K(\text{DC}, \tau/T)$ wird Null, entsprechend $\eta_{\text{PWM}} = 1$.

(3) Übergangsbereich:

Interessant am letzten Ausdruck für die elektrische Leistung ist, dass der Beitrag 1. Ordnung Null wird, und Gl. (A.21) somit tatsächlich bis zur Ordnung $O(\tau^{-2})$ gültig ist. Eine Entwicklung der Funktion $K(\text{DC}, \tau/T)$ bis in 3. Ordnung zeigt dies explizit:

$$K(\text{DC}, \tau/T) = \frac{T^2}{12\tau^2} \text{DC} (1 - \text{DC}) + O(\tau^{-4}). \tag{A.22}$$

Dieser Befund zeigt das schon für relativ kleine Werte von τ/T der Grenzfall $\tau/T \rightarrow \infty$ sehr gut erfüllt ist. Dies ist im obigen Plot für $K(\text{DC}, \tau/T)$ zu erkennen: Der Übergangsbereich liegt eher bei $\tau/T \approx 0.1$, und nicht bei $\tau/T \approx 1$ wie man naiv erwarten würde. Die Gl. (A.21) für die mittlere elektrische Leistung stellt also schon für relativ kleine Induktivitäten L eine gute Näherung dar. Nehmen wir als Beispiel die typischen Werte $R = 0.5 \, \Omega$ und $L = 50 \, \mu\text{H}$, dann ist $\tau = 0.1 \, \text{ms}$, und bei einer PWM Frequenz von 4 kHz ergibt sich $\tau/T = 0.4$. Für K ergibt sich dann (bei $\text{DC} = 0.5$) der Maximalwert von $K = 0.11$, d.h., bei Benutzung von Gl. (A.21) wird ein maximaler Fehler von 11% gemacht (man bedenke dass $1 - K$ in Gl. (A.17a) eingeht). Bei einem Verhältnis von $\tau/T = 1$ würde dieser Fehler nur noch 2% betragen. Berücksichtigt man zusätzlich die Korrektur durch Gl. (A.22), dann erhält man für praktische Belange nahezu exakte Werte. Beispiel: Für $\tau/T = 0.4$ ergibt Gl. (A.22) den Wert $K = 0.13$ (bei $\text{DC} = 0.5$). Damit verringert sich der Fehler auf 2%. Für $\tau/T = 1$ verbleibt ein Fehler von 0.05%. Der Verlustfaktor kann also in den meisten praktischen Fällen ausreichen genau bestimmt werden mit

$$\eta_{\text{PWM}} \approx 1 + \left(\frac{1}{12} \frac{T}{\tau} \frac{\Delta U_{\text{RL}}}{U_{\text{RL}}} \text{DC} (1 - \text{DC}) \right)^2. \tag{A.23}$$