1.9 Elektromotor

1 Theoretische Grundlagen

Der Elektromotor ist ein Beispiel für ein elektromechanisches System, dessen Bewegungsgleichungen sowohl von mechanischen als auch von elektrischen Größen abhängen. Da solche Systeme in den Standardlehrbüchern kaum behandelt werden, soll die Theorie zunächst etwas ausführlicher erläutert werden.

1.1 Bewegungsgleichungen

Bei einem Gleichstrommotor befindet sich ein drehbarer Anker zwischen den Polen eines Permanentmagneten. Der Anker kann durch ein Ersatzschaltbild nach Abb. 1 beschrieben werden. Die angelegte Spannung U_A liegt an einer Reihenschaltung bestehend aus dem Ohmschen Widerstand R und der Induktivität L des Ankers, sowie der im Anker induzierten Spannung U_i. Unter der Annahme eines weitgehend homogenen Erregerfelds des Permanentmagneten ist diese Spannung proportional der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des Ankers:

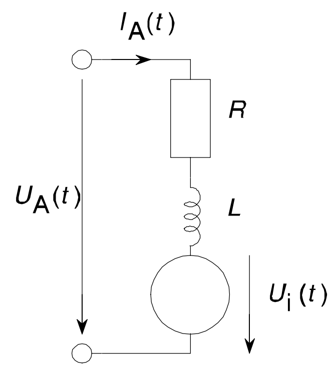

Abb. 1: elektrisches Ersatzschaltbild für den Anker eines Elektromotors

$$U_i(t) = \Phi_E \cdot \omega(t). \tag{1}$$

Φ_E ist der auf den Anker wirksame magnetische Fluss des Erregerfeldes.
Damit ergibt sich für die elektrischen Größen nach der Kirchhoffschen Maschenregel:

$$U_A(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_i(t) = R \cdot I_A(t) + L \cdot \frac{\mathrm{d}I_A}{\mathrm{d}t} + \Phi_E \cdot \omega(t). \tag{2}$$

Die mechanischen Kenngrößen des Motors sind das Trägheitsmoment J des Ankers, sowie die verschiedenen Drehmomente:
- Das vom Motor erzeugte Drehmoment ist proportional dem Ankerstrom: $M(t) = \Phi_E \cdot I_A(t)$.
- Das Reibungsmoment ist proportional der Winkelgeschwindigkeit: $M_r(t) = r \cdot \omega(t)$.
- Das den Motor belastende Drehmoment ist $M_L(t)$.

Damit ergibt sich für die Drehbewegung des Motors nach Newton die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = M(t) - M_r(t) - M_L(t) = \Phi_E \cdot I_A(t) - r \cdot \omega(t) - M_L(t). \tag{3}$$

(2) und (3) bilden das den Elektromotor beschreibende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} L \cdot \frac{\mathrm{d}I_A(t)}{\mathrm{d}t} + R \cdot I_A(t) + \Phi_E \cdot \omega(t) &= U_A(t) \quad \text{(a)} \\ J \cdot \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} - \Phi_E \cdot I_A(t) + r \cdot \omega(t) &= -M_L(t) \quad \text{(b)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die vorgegebenen Größen $U_A(t)$ und $M_L(t)$ bilden den inhomogenen Anteil, $I_A(t)$ und $\omega(t)$ ergeben sich als Lösungen des Gleichungssystems.

Da die Induktivität des Ankers L klein und die Änderungen des Stromes relativ langsam sind, kann der Term $L\cdot \mathrm{d}I_A/\mathrm{d}t$ vernachlässigt werden. Das Differentialgleichungssystem (4) lässt sich dann auf eine Differentialgleichung für $\omega(t)$ reduzieren. Durch Einsetzen des Stromes aus (4a)

$$I_A(t) = \frac{U_A(t)}{R} - \frac{\Phi_E \cdot \omega(t)}{R}. \tag{5}$$

in (4b) ergibt sich die Differentialgleichung für $\omega(t)$:

$$J\cdot \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + \left(r + \frac{\Phi_E^2}{R} \right) \omega(t) = \frac{\Phi_E}{R}\cdot U_A(t) - M_L(t). \tag{6}$$

1.2 Anlaufverhalten des Motors

Von großem Interesse ist in der Technik das Anlaufverhalten eines Elektromotors. Es ist damit gefragt nach der Abhängigkeit $\omega(t)$, die sich nach dem Einschalten einer Ankerspannung, d.h. einer sprunghaften Zunahme der Spannung U_A von 0 auf U_0, ergibt. Der Motor soll dabei nicht belastet werden. Für das Lastmoment gilt also $M_L = 0$. Die Gleichung (6) vereinfacht sich damit zu

$$\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{r\cdot R + \Phi_E^2}{J\cdot R}\cdot \omega(t) = \frac{\Phi_E \cdot U_0}{J\cdot R}. \tag{7}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (rechte Seite der Gleichung = 0) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\omega(t) = \omega_{hom}(t) + \omega_{sp}(t). \tag{8}$$

Eine spezielle Lösung ist der stationäre Zustand für $t \to \infty$:

$$\omega(t \to \infty) = \omega_0 = \frac{\Phi_E \cdot U_0}{r\cdot R + \Phi_E^2}. \tag{9}$$

Durch Einsetzen in (7) lässt sich diese Lösung leicht bestätigen.
Als Lösungsansatz für die homogene Differentialgleichung eignet sich die e-Funktion

$$\omega(t) = A\cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}. \tag{10}$$

Setzt man diesen Ansatz in (7) ein, erhält man für die Zeitkonstante τ:

$$\tau = \frac{J\cdot R}{r\cdot R + \Phi_E^2} \sim J. \tag{11}$$

Der Faktor A in (10) bestimmt sich aus der Anfangsbedingung $\omega(0) = 0$ (Stillstand des Motors bei $t = 0$) zu $A = -\omega_0$. Als Lösung für $\omega(t)$ (siehe auch Abb. 2a) erhält man also schließlich
Der stationäre Ankerstrom ergibt sich aus (5) und (9):

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right). \tag{12}$$

$$I_0 = \frac{r}{r\cdot R + \Phi_E^2}\cdot U_0 = \frac{U_0}{R + R_r}. \tag{13}$$

Im stationären Zustand kann die Spannungsquelle U_i im Ersatzschaltbild (Abb. 1) also durch einen Widerstand $R_r = \Phi_E^2/r$ ersetzt werden. Dieser Widerstand wird mit zunehmender Reibung kleiner. Entsprechend steigt I_0 an. Für ω_0 erhält man dann mit (9):

$$\omega_0 = \frac{\Phi_E}{r} \cdot \frac{U_0}{R + R_r} = \frac{\Phi_E}{r} \cdot I_0 = \frac{R_r}{\Phi_E} \cdot I_0 . \tag{14}$$

Die Zeitabhängigkeit des Stroms (siehe auch Abb. 2b) ergibt sich aus (5), (12) und (13):

$$I_A(t) = I_0 \cdot \left(1 + \frac{R_r}{R} \cdot e^{-t/\tau} \right) . \tag{15}$$

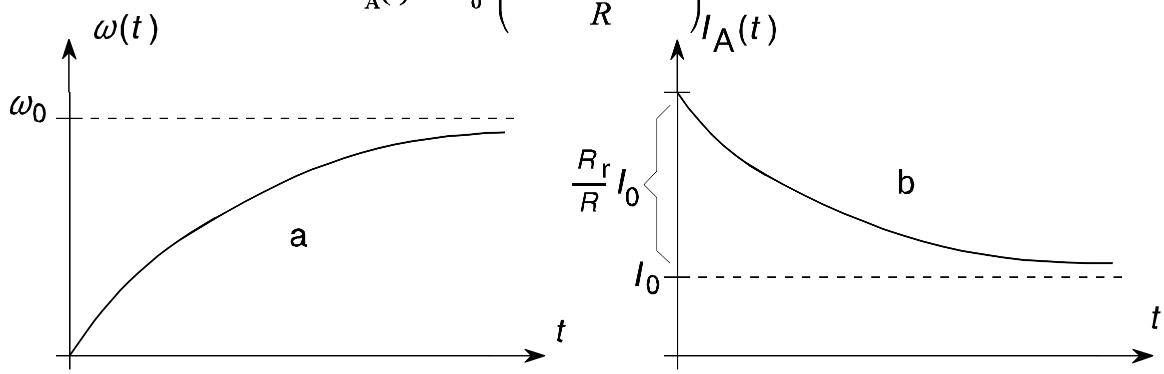

Abb. 2: Zeitverlauf der Winkelgeschwindigkeit (a) und des Stromes (b) nach dem Einschalten

1.3 Verhalten des Motors bei Belastung

Wird der Motor mit einem konstanten Moment M_L belastet, so ändert sich die Zeitkonstante des Anlaufverhaltens nicht, sondern nur die Winkelgeschwindigkeit im stationären Zustand. Wie man an Gleichung (6) sieht, beeinflusst M_L nämlich nur den inhomogenen Anteil der Differentialgleichung. Es ergibt sich

$$\omega(t) = \omega_L \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \tag{16}$$

Dabei ist ω_L die Winkelgeschwindigkeit unter Last im stationären Zustand (siehe (6) und (9)):

$$\omega_L = \omega_0 - \frac{R}{r \cdot R + \Phi_E^2} \cdot M_L = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{R}{U_0} \cdot \frac{M_L}{\Phi_E} \right) . \tag{17}$$

Die maximal mögliche Belastung $M_{max} = \Phi_E \cdot U_0 / R$ führt zum Stillstand des Motors. Der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω_L und dem Lastmoment M_L ist eine linear abfallende Funktion:

$$\omega_L = \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{M_L}{M_{max}} \right) . \tag{18}$$

Der Ankerstrom im stationären Zustand berechnet sich aus (5), (9) und (17) zu

$$I_L = I_0 + \frac{R_r}{R + R_r} \cdot \frac{M_L}{\Phi_E} = I_0 \cdot \left(1 + \frac{R_r}{R} \cdot \frac{M_L}{M_{max}} \right) . \tag{19}$$

Er nimmt also linear mit dem Lastmoment zu. Bei Erreichen der maximal möglichen Belastung wird er $I_L = U_0/R$.

1.4 Wirkungsgrad des Motors

Der Wirkungsgrad η eines Motors ist das Verhältnis zwischen abgegebener und aufgenommener Leistung:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \tag{20}$$

Das Verhältnis M_L/M_{max} in (19) kann mit (18) durch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\Omega = \omega_L/\omega_0$ ersetzt werden. Damit wird der Strom bei Belastung

$$I_L = I_0 \cdot \left(1 + \frac{R_r}{R} \cdot (1 - \Omega) \right) \tag{21}$$

und die aufgenommene Leistung

$$P_1 = U_0 \cdot I_L = U_0 \cdot I_0 \cdot \left(1 + \frac{R_r}{R} \cdot (1 - \Omega) \right). \tag{22}$$

Die abgegebene Leistung berechnet sich mit (17) und (14) zu

$$\begin{aligned} P_2 &= M_L \cdot \omega_L = M_{max} \cdot \omega_0 \cdot (1 - \Omega) \cdot \Omega \\ &= U_0 \cdot I_0 \cdot \frac{R_r}{R} \cdot (1 - \Omega) \cdot \Omega. \end{aligned} \tag{23}$$

Für den Wirkungsgrad erhält man schließlich mit (22) und (23) einen Ausdruck, der außer von den Motorkonstanten nur noch von dem Verhältnis Ω der Winkelgeschwindigkeiten ohne und mit Belastung abhängt: Der Wirkungsgrad ist immer kleiner als 1.

$$\eta = \frac{\Omega \cdot (1 - \Omega)}{1 - \Omega + R/R_r}. \tag{24}$$

2 Versuchsdurchführung

2.1 Beschreibung der Messanordnung

Der Motor wird von einem Labornetzgerät gespeist und mit einem Kippschalter ein- und ausgeschaltet (Abb. 3). Auf der Achse des Motors ist eine Scheibe mit zwei Marken befestigt. Wenn eine dieser Marken an der Lichtschranke vorbeiläuft, wird ein Impuls an die Stoppuhr gegeben. Die Stoppuhr misst automatisch zwei Zeiten:

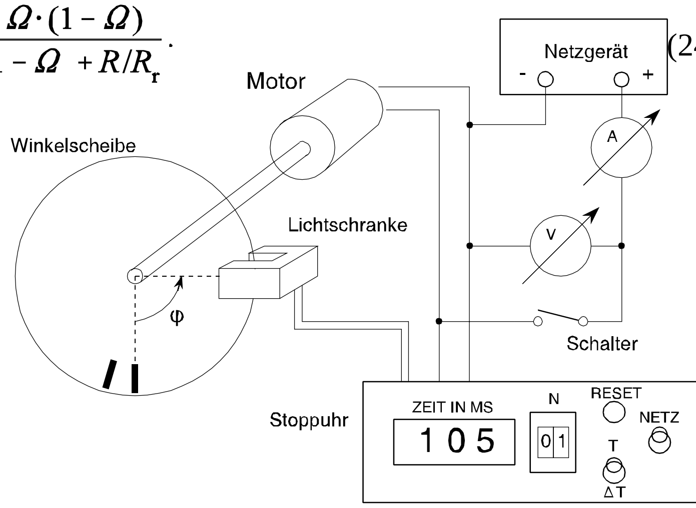

Abb. 3: Versuchsaufbau

- die Zeit T vom Einschalten des Motors bis zum Durchgang der ersten Marke durch die Lichtschranke
- die Zeit ΔT zwischen den Durchgängen der beiden Marken.

Zum Ausmessen des Anlaufverhaltens wird die 1. Marke der Scheibe im Ruhezustand um einen bestimmten Winkel φ gegenüber der Lichtschranke verdreht. Winkel über 360° lassen sich dadurch einstellen, dass der Ziffernwahlschalter an der Uhr auf einen Wert N größer als 1 eingestellt wird. Es wird damit die Zeit T vom Einschalten bis zum N-ten Durchgang der Marken gemessen (d.h. $\varphi + (N-1) \cdot 360°$). Die zweite gemessene Zeit ΔT ist ein Maß für die erreichte Geschwindigkeit. Der Winkelabstand der beiden Marken beträgt 9°. Setzt man die Uhr bei laufendem Motor auf Null, so wird die Zeit T für N volle Umdrehungen ausgemessen.

2.2 Anlaufverhalten

Die Zeitkonstante τ des Anlaufverhaltens ist nach (11) dem Trägheitsmoment J des Motors proportional. Dieses Trägheitsmoment soll dadurch bestimmt werden, dass die Zeitkonstante zweimal gemessen wird:
- τ_1 : Motor ohne Zusatzmasse
- τ_2 : Motor mit Zusatzmasse.

Wenn das Trägheitsmoment der Zusatzmasse J_0 bekannt ist erhält man

$$J = \frac{J_0 \cdot \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}. \tag{25}$$

Aufgaben:

2.2.1 Nehmen Sie zwei Messreihen für die Zeiten T und ΔT einmal ohne und einmal mit Zusatzmasse auf ($U_0 \approx 8$ V). Es sollten etwa 5 verschiedene Werte im Abstand von 20 ms (ohne Zusatzmasse), bzw. 200 ms (mit Zusatzmasse) gemessen werden. Berechnen Sie aus den ΔT die Winkelgeschwindigkeiten $\omega(T)$.

2.2.2 Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_0 im stationären Zustand durch Ausmessen von 10 Umdrehungen.

2.2.3 Tragen Sie auf halblogarithmischem Papier die Funktion 1 - $\omega(T)/\omega_0$ gegen T auf. Wählen Sie für beide Messreihen die Maßstäbe für T so, dass das Papier optimal ausgenutzt wird. Bestimmen Sie aus den Steigungen der zeichnerisch zu ermittelnden Ausgleichsgeraden die Zeitkonstanten τ_1 und τ_2.

Da das verwendete halblogarithmische Papier auf dem dekadischen Logarithmus basiert, ist die Gleichung der Geraden

$$\lg\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{\lg e}{\tau} \cdot t. \tag{26}$$

Die beiden Seiten Δt und Δy des Steigungsdreiecks werden mit dem Lineal ausgemessen. Da auf der vertikalen Achse eine Dekade genau 10 cm entspricht, berechnet sich die Zeitkonstante nach der Beziehung

$$\tau = \frac{10}{\Delta y/\mathrm{cm}} \cdot \lg e \cdot \Delta t. \tag{27}$$

2.2.4 Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_0 der Zusatzmasse, und bestimmen Sie nach (25) das Trägheitsmoment des Motors.

2.2.5 Messen Sie U_0, I_0 und R. Berechnen Sie daraus den Widerstand R_r.

2.3 Verhalten unter Belastung

Der Motor wird durch eine um die Schnurrolle mit dem Durchmesser d_s gespannte und von zwei Federwaagen gehaltene Schnur belastet. Durch Spannung der Federwaagen können unterschiedliche Belastungszustände eingestellt werden. Die Federwaagen sind in Gramm geeicht. Das Lastmoment ergibt sich aus der Differenz der Ablesungen $\Delta m = m_1 - m_2$ und dem wirksamen Hebelarm $d_s/2$

$$M_L = 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \Delta m \cdot \frac{d_s}{2}. \tag{28}$$

Mit der Laufzeit T_{10} für 10 Umdrehungen erhält man daraus die abgegebene Leistung

$$P_2 = M_L \cdot \frac{20\pi}{T_{10}} . \tag{29}$$

Aufgaben:

2.3.1 Messen Sie U_0, I_L, Δm und T_{10} für 5 verschiedene Belastungszustände (I_L < 200 mA, $U_0 \approx$ 8 V).

2.3.2 Berechnen Sie daraus Ω, M_L und η.

2.3.3 Tragen Sie M_L als Funktion von Ω auf. Zeichnen Sie die Ausgleichsgerade (siehe auch (18)), und bestimmen Sie daraus M_{max}.

2.3.4 Berechnen Sie mit den in Aufgabe 2.2.4 bestimmten Werten für R und R_r die Abhängigkeit $\eta = \eta(\Omega)$ (siehe (24)), und tragen Sie sie grafisch auf. Berechnen Sie das Maximum η_{max} und das dazugehörige Ω_{max}.

2.3.5 Tragen Sie Ihre Messwerte für η als Funktion von Ω in dieses Diagramm ein.

Literatur:

Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik, Kap. 7.5.10
Küpfmüller: Einführung in die Theoretische Elektrotechnik, Kap. 35

Geräte:

2 Multimeter, Stoppuhr mit Lichtschranke, Motor mit Schnurrolle (d_s = 15,0 mm), Schalter, Kabel, 2 Federwaagen (500 g), Zusatzmasse (d = 100,0 mm, m = 130,8 g)

5.2000/Ra